

# ניתוח ההישגים של תלמידי ישראל במחקר פיזה במתמטיקה<sup>1</sup>

מאת

זביגנייב מרצ'יניאק, אגניישיקה סוטווסקה, אנטונינה סוטווסקה

מאי 2022

תרגום מאנגלית: לירון רובניס

עריכה לשונית: תמר בורשטיין

---

<sup>1</sup> הדו"ח הוכן עבור קרן טראמפ. בהכנת הנוסח העברי סייעה היוזמה – מרכז לידע ולמחקר בחינוך.

## תוכן העניינים

3	מבוא
6	מה אפשר ללמוד על ההישגים של תלמידי ישראל מדוחות ההערכה הבין-לאומיים של מחקר פיזה?
11	ההישגים של תלמידי ישראל מתוך התבוננות בפריטי המחקר
16	תובנות בנוגע לתוצאות של תלמידי ישראל בתחומי התוכן השונים
25	מסקנות והמלצות

## מבוא

העולם המשתנה במהירות מעורר אתגרים חדשים בתחום החינוך, והתפתחותה המהירה של הטכנולוגיה מגבירה את הדרישה לחינוך מתמטי טוב. דרישה זו ניכרת לא רק בתעשייה, אלא בתחומים רבים אחרים הדורשים קבלת החלטות מורכבת שמתבססות גם על הבנה של נתוני עֵתָק (ביג דאטה). יתר על כן, רבות מהמשימות המתמטיות המסורתיות נעשות כיום בידי מכונות (למשל ההבנה והשימוש בלוחות זמנים של רכבות). בו בזמן אנו עדים לצמיחה מואצת במספר המשימות החדשות שאי אפשר לפתור ביישום ישיר של הכלים המתמטיים המסורתיים שנלמדים בבית הספר, שכן הן דורשות גישה יצירתית יותר. מכאן שהחינוך המתמטי המודרני צריך להכין את התלמידים להתמודדות עם בעיות מתמטיות בדרכים שלא נלמדו קודם לכן בכיתות.

מחקר פיזה, שנערך על ידי הארגון לשיתוף פעולה ולפיתוח כלכלי (OECD), העמיד נושא זה במרכז וטבע את המושג "אוריינות מתמטית". במסגרת המושגית של מחקר פיזה 2012 מתואר המושג כך:

אוריינות מתמטית היא יכולתו של הפרט לנסח, ליישם ולפרש מתמטיקה במגוון הקשרים. היא כוללת חשיבה מתמטית (mathematical reasoning) ושימוש במושגים מתמטיים, בהליכים, בעובדות ובכלים מתמטיים כדי לתאר, להסביר ולחזות תופעות שונות. היא מסייעת לאנשים לזהות את תפקידה של המתמטיקה בעולם ולגבש דעות והחלטות מבוססות כמתבקש מאזרחים מועילים, מעורבים וחושבים.<sup>2</sup>

יתר על כן, בעשור האחרון גוברת הדרישה למיומנויות מתמטיות מורכבות יותר, ובכללן חשיבה מתמטית. בעקבות כך אישר ב-2018 הוועד המנהל של המדינות המשתתפות את השינויים הבאים בהגדרה של המושג אוריינות מתמטית:

אוריינות מתמטית היא יכולתו של אדם **לחשוב באופן מתמטי** ולנסח, ליישם ולפרש מתמטיקה כדי לפתור בעיות במגוון הקשרים בעולם האמיתי. היא כוללת מושגים, הליכים, עובדות וכלים שמאפשרים לבני אדם

לתאר תופעות שונות, להסביר אותן ולחזות אותן. היא מסייעת לאנשים לזהות את תפקידה של המתמטיקה בעולם ולגבש דעות והחלטות מבוססות כמתבקש מאזרחים מועילים, מעורבים וחושבים של המאה ה-21.<sup>3</sup> בזכות הגישה הייחודית שנקטת במחקר פיזה – המקשרת ישירות בין החינוך לבין הדרישות של העולם האמיתי ומוזדדת זאת בתחומי המתמטיקה, הקריאה והמדעים – הוא משמש כעת כלי הערכה חשוב באזורים רבים בעולם: מחזור המחקר הראשון התקיים ב-43 מדינות וכלכלות בעולם (32 בשנת 2000 ו-11 נוספות בשנת 2002); המחזור השני (2003) ב-41 מדינות וכלכלות; המחזור השלישי (2006) ב-57 מדינות; והמחזור הרביעי ב-75 מדינות וכלכלות (65 בשנת 2009 ו-10 נוספות בשנת 2010). עד כה השתתפו 65 מדינות במחקר פיזה 2012. בשנת 2018, המחזור המלא האחרון שבו נערך מחקר פיזה, בחרו להשתתף בו 79 מדינות וכלכלות. כמו כן העניין הציבורי בתוצאות של מחקר פיזה הולך וגדל, וביום פרסומן הן זוכות לכותרות ראשיות בכל אמצעי התקשורת המרכזיים בעולם. אולם העניין הציבורי מוגבל בדרך כלל לטבלאות העיקריות ולשינויים שחלו מאז מחזור המחקר האחרון. בדוח מחקר פיזה, שמפורסם על ידי ה-OECD לאחר כל מחזור, מופיע ניתוח מפורט מאוד של התוצאות. וחשוב מכול, OECD מנגיש את כל נתוני המחקר באתר לכל המעוניינים. ניתוח מערך הנתונים הזה יכול לספק תובנות מועילות ולתרום לשיפור החינוך. אנו, מחברי דוח זה,<sup>4</sup> ניצלנו אפוא הזדמנות זו ובשנת 2004, לאחר פרסום תוצאות מחקר פיזה 2003, בחנו את החינוך המתמטי בפולין. התוצאה הממוצעת שקיבלו תלמידי פולין במתמטיקה הייתה נמוכה ממוצע ה-OECD, ובסולמות המשנה בדוח הבין-לאומי לא מצאנו כל סיבה לכך. החלטנו אפוא לערוך מחקר מעמיק ולהתייחס לכל פריט ופריט. מחקר זה הוביל אותנו למסקנות מעניינות, ואלה שימשו בסיס לרפורמה הלאומית בתוכנית הלימודים בפולין בשנת 2008, ולאחר מכן לבדיקה מחודשת ולתיקון הבחינות הלאומיות. אנחנו מאמינים שאת השיפור הניכר בתוצאות מחקר פיזה בפולין מאז 2012 אפשר לזקוף לשינויים הללו. במחקר הנוכחי, באשר להישגיהם של תלמידי ישראל, שימשו לנו תוצאות מחקר פיזה 2012 נקודת ייחוס בסיסית, כיוון שזו הייתה הפעם האחרונה שבה המתמטיקה הייתה התחום המרכזי. במקרים כאלה מערך פריטי

---

PISA 2021 Mathematics Framework, OECD 2018<sup>3</sup>  
Zbigniew Marciniak, Agnieszka Sułowska, Antonina Sułowska<sup>4</sup>

המחקר עשיר יותר. אין להמעיט בחשיבות הדבר, שכן מסקנות יכולות לנבוע רק מתצפיות סטטיסטיות. כדי לאמת את התובנות שלנו בדקנו מערך משנה של פריטים אלו גם בשני המחקרים העוקבים (2015, 2018), שבהם לא הייתה המתמטיקה במוקד. אנחנו מקווים שדוח זה יתרום לדיון באשר לחינוך המתמטי בישראל.

## מה אפשר ללמוד על ההישגים של תלמידי ישראל מדוחות ההערכה הבין-לאומיים של

### מחקר פיזה?

נתחיל במסקנות החשובות ביותר העולות מהדוח ונוגעות גם לחינוך המתמטי בישראל. בסעיפי ההערות הכלליות בדוח מוזכרת ישראל כמה פעמים:

- בין מחקר פיזה 2000 למחקר פיזה 2012 עלה שיעור בעלי ההישגים הטובים ביותר **בקריאה** באלבניה, **בישראל** ובפולין, וירד שיעורם של בעלי ההישגים הנמוכים במדינות אלה.
- בין מחקר פיזה 2006 למחקר פיזה 2012 עלה שיעור בעלי ההישגים הטובים ביותר **במדעים** באיטליה, בפולין ובקטאר. בין מחקר פיזה 2009 למחקר פיזה 2012 עלה שיעור זה באסטוניה, **בישראל** ובסינגפור. בפרקי הזמן הללו ירד במדינות אלה שיעורם של בעלי ההישגים הנמוכים.
- בין מחקר פיזה 2003 למחקר פיזה 2012 ירד שיעור בעלי ההישגים הנמוכים באיטליה, בפולין ובפורטוגל, ועלה שיעורם של בעלי ההישגים הגבוהים. נתון זה נצפה גם **בישראל**, בקטאר וברומניה בין השנים 2012-2006, ובאירלנד, במלדיה וברוסיה בין השנים 2012-2009.
- ב-24 מדינות וכלכלות (מבין 63) שהשתתפו במחקר פיזה 2015 ו-2018 לא ניכר שינוי רב בהישגים בשנים אלה באף אחד משלושת תחומי הליבה שנבדקו (קריאה, מתמטיקה ומדעים). אלה הן המדינות: אוסטריה, בלגיה, ברזיל, צ'כיה, צ'ילה, קוסטה ריקה, קרואטיה, אסטוניה, צרפת, גרמניה, יוון, הונג קונג [סין], הונגריה, אירלנד, **ישראל**, קוריאה, לבנון, ליטא, מקסיקו, מולדובה, ניו זילנד, שוודיה, איחוד האמירויות הערביות וארצות הברית.
- 10 המשתתפות בפיזה שבהן נרשמו הפערים הנרחבים ביותר בתוצאות (ההבדלים הגדולים ביותר בציון בין העשירון העליון של התלמידים לבין העשירון התחתון) הן **ישראל**, בלגיה, סלובקיה, ניו זילנד, צרפת וקוריאה, וכן המדינות והכלכלות השותפות טאיפיי הסינית, סינגפור, שנגחאי בסין וקטאר.
- **בישראל**, באוסטריה, באיטליה, בניו זילנד ובלוקסמבורג, שנמצאות במרכז התפלגות ההישגים, היה שיעור הבנים שהשיגו את רמות הבקיאיות הגבוהות ביותר גדול במידה ניכרת משיעור הבנות (הבדל של 7.7 לעומת 5.8 נקודות האחוז).

תלמידי ישראל לא השתתפו במחקר פיזה 2003, שבו הושם לראשונה דגש עיקרי על המתמטיקה. עם זאת יש בידינו התוצאות הממוצעות שהשיגו במחקרי פיזה שנערכו לאחר מכן:

-	2003
442	2006
447	2009
466	2012
470	2015
463	2018

יש לזכור כי סולם פיזה מכויל כך שהממוצע במדינות ה-OECD הוא 500 נקודות וסטיית התקן 100 נקודות. פירוש הדבר שהתוצאה הממוצעת של תלמידי ישראל במתמטיקה נותרה תמיד נמוכה מזו של מדינות ה-OECD. כדי לחשב את הערכים שניתנים למדינות, מחקר פיזה מיישם את מודל ההסתברות ראש (probabilistic Rasch model), שבו כל תלמיד שנבחן וכל פריט שנבדק ממוקמים על הסולם שהוזכר לעיל. הנתונים מאורגנים כך שלתלמיד הממוקם בדיוק באותה נקודה שבה נמצא פריט מסוים, יש סיכוי של 50% לפתור את הבעיה המוצגת באותו פריט.

יתר על כן, סולם פיזה מחולק למרווחים המגדירים שש רמות של בקיאות במתמטיקה: רמה 6 (669 נקודות ומעלה) היא רמת המיומנויות הגבוהה ביותר, ורמה 1 (בין 358 ל-420 נקודות) היא רמת המיומנויות הנמוכה ביותר. הכישורים המתמטיים המיוחסים לרמות הללו מתוארים בדוח OECD<sup>5</sup>:

ברמה 1 התלמידים יכולים לענות על שאלות שהקשריהן מוכרים; שאלות שכל המידע הרלוונטי מוצג בהן והן מוגדרות בבירור. הם יכולים לזהות מידע ולבצע הליכים שגרתיים לפי הוראות ישירות במצבים ברורים. ביכולתם לבצע פעולות מובנות מאליהן הנובעות מגירוי נתון.

פירוש הדבר שתלמידים ברמת בקיאות מתמטית זו אינם מסוגלים אלא לשחזר את המיומנויות הבסיסיות שנרכשות בבית הספר. יש לזכור שבכל מדינה יש תלמידים שזוהי רמת בקיאותם.

<sup>5</sup> OECD 2014, p. 61, What Students Know and Can Do, vol. 1, ראו תרשים 1.2.21.

להלן התפלגות הציונים של תלמידי ישראל ברמות הבקיאות השונות במתמטיקה משנת 2012 ואילך:

רמה	<1	1	2	3	4	5	6
2012	15.9	17.6	21.6	21.0	14.6	7.2	2.2
2015	15.0	17.1	21.1	21.7	16.1	7.1	1.9
2018	17.7	16.4	20.7	21.0	15.4	7.0	1.8

מקור: תוצאות פיזה 2015, טבלה 1.4.2a ; תוצאות פיזה 2018, טבלה I.B1.2.

הייצוג הגרפי של התפלגות זו ב-2012 זמין בדוח פיזה (שצוטט בהערה 3), בעמ' 52, תרשים I.2.22.

המחקרים הבין-לאומיים שעסקו בתוצאות פיזה שימשו לניתוח מפורט של שיעורי התלמידים שבשני קצות הסולם:

מתחת לרמה 2 ומעל רמה 4. להלן שיעורי התלמידים בישראל ובמדינות ה-OECD בקבוצות אלה:

שנה	ישראל רמה 1 ומטה	OECD רמה 1 ומטה	ישראל רמות 5 ו-6	OECD רמות 5 ו-6
2006	42.0	22.5	6.1	12.5
2009	39.5	22.0	5.9	12.5
2012	33.5	22.2	9.4	12.9
2015	32.1	22.6	8.9	12.6
2018	34.1	23.9	8.8	10.9

מקור: תוצאות פיזה 2015, טבלה 1.4.2a ; תוצאות פיזה 2018, טבלה I.B1.2.

נראה כי ב-12 השנים הללו הצטמצם שיעור התלמידים הישראלים החלשים ביותר. עם זאת העלייה בשיעורם במחזור פיזה 2018 מטרידה מעט. מנתוני פיזה, וכן מניסיון של רבות מהמדינות המשתתפות, עולה כי קל יותר לשפר את התוצאות של התלמידים החלשים ביותר, מלהעלות את שיעור התלמידים הטובים ביותר. במדינות מעטות בלבד ניכרה ב-20 השנים האחרונות עלייה בשיעור התלמידים הטובים ביותר.



בשנים שבהן הדגש העיקרי במחקר פיזה היה בתחום המתמטיקה (2003 ו-2012, וממש עכשיו – 2022), מוצגת בדוח פיזה הבין-לאומי התפלגות התוצאות בסולמות המשנה השונים. בדקנו מה יכול המידע הנוסף משנת 2012 לתרום לתמונה הכללית באשר לחינוך המתמטי בישראל.

מעגל המידול המתואר במסגרת המושגית של פיזה מדגים כיצד אנו מיישמים את המתמטיקה בבואנו לפתור בעיות בעולם האמיתי. מעגל זה כולל יישום רציף של שלושה תהליכים:

- **ניסוח** של מצבים בצורה מתמטית
- **יישום** של מושגים, עובדות, הליכים והיסקים מתמטיים
- **פירוש** של תוצאות מתמטיות, שימוש בהן והערכתן

להלן התוצאות של תלמידי ישראל בסולמות משנה אלה בשנת 2012:

- התוצאה הממוצעת של תלמידי ישראל ב**ניסוח** הייתה **465** נקודות. מקום 40 ברשימת המדינות. מדינות שהשיגו תוצאות דומות: ארצות הברית, הונגריה, קרואטיה. התוצאה הממוצעת של בנים הייתה גבוהה ב-**15** נקודות מהתוצאה הממוצעת של בנות.

- התוצאה הממוצעת של תלמידי ישראל ב**יישום** הייתה **469** נקודות. מקום 41 ברשימת המדינות. מדינות שהשיגו תוצאות דומות: ארצות הברית, קרואטיה, שוודיה. התוצאה הממוצעת של בנים הייתה גבוהה ב-**9** נקודות מהתוצאה הממוצעת של בנות.

- התוצאה הממוצעת של תלמידי ישראל ב**פירוש** הייתה **462** נקודות. מקום 42 ברשימת המדינות. מדינות שהשיגו תוצאות דומות: סלובקיה, רוסיה, ליטא, יוון. התוצאה הממוצעת של בנים הייתה גבוהה ב-**18** נקודות מהתוצאה הממוצעת של בנות.

ההבדלים בין התלמידים הישראלים בסולמות המשנה שקשורים לתהליכים האלה אינם גדולים. הם עשויים להעיד על כך שבתי הספר בישראל מקדישים את רוב תשומת הלב לשלבי הביניים של תהליך המידול, כלומר לפעילויות פורמליות בלבד. כמו כן בתהליך ה**יישום** ההבדל בין תוצאות הבנים לבין תוצאות הבנות היה הקטן ביותר. אין הדבר מעיד שיישומי המתמטיקה אינם מתורגלים בכיתות עצמן – ייתכן שהתלמידים אינם מבחינים ביניהם לבין הפעילויות הפורמליות במתמטיקה. כדי להשיג רמת בקיאות גבוהה ב**ניסוח** וב**פירוש** יש צורך בדיונים חופשיים ובמתן אפשרות לטעות פעמים רבות בדרך למציאת הפתרון. כשהתהליכים הללו מוכוונים אך ורק על ידי המורה, הם הופכים להליכים שיש רק לזכור לצורך שימוש עתידי.

ההשערה שציינו לעיל זכתה לתמיכה בתשובותיהם של התלמידים הישראלים על חלק מהשאלות בשאלון התלמידים. כשהתבקשו להעריך את מידת החשיפה ליישומים של מתמטיקה, מיקמו תשובותיהם את ישראל במקום ה-53 (מתוך 65). לדוגמה, כשנשאלו אם אי פעם נתקלו בבעיה הנוגעת להנחת אריחי ריצוף, ענו רובם "לא" (ישראל במקום ה-57). עם זאת הם העידו על היכרות טובה עם מושגים מתמטיים מופשטים, כמו משוואות ליניאריות (ישראל במקום ה-19), פונקציות ריבועיות (ישראל במקום ה-33) ואפילו מספרים מרוכבים (ישראל במקום ה-16).

\*\*\*

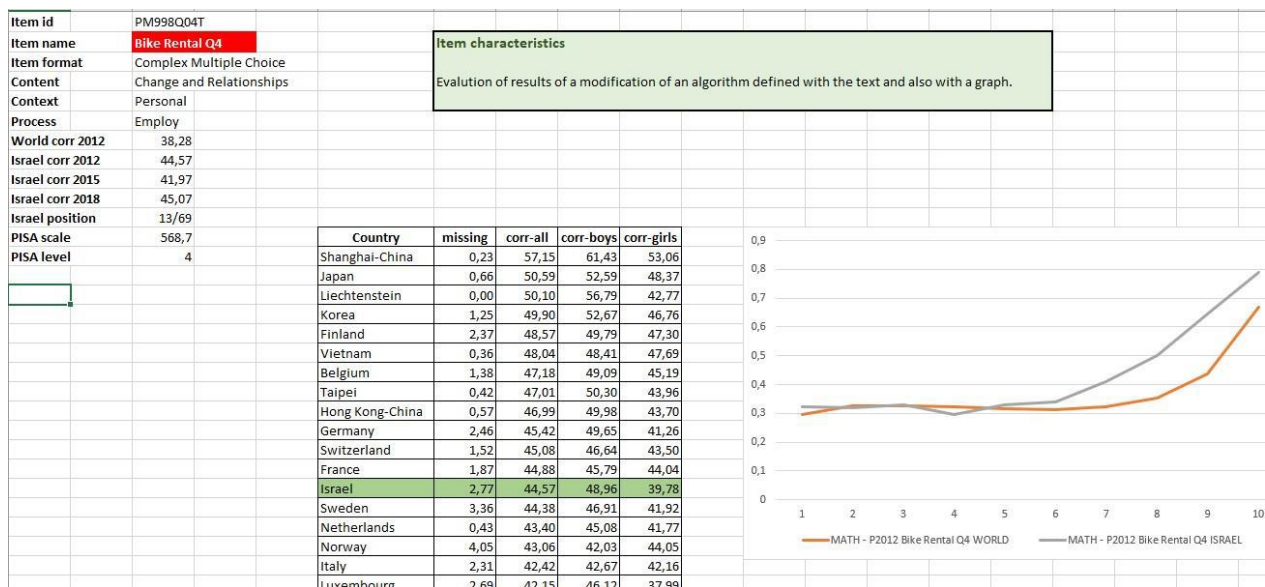
מערך נוסף של סולמות משנה נוגע לתחומי התוכן. בשל הבדלים בין מסורות שונות בשמות הסטנדרטיים של תתי-התחומים במתמטיקה (אלגברה, גאומטריה וכו'), קבע מחקר פיזה ארבעה שמות מקוריים לתחומי התוכן:

- **כמות**
- **מרחב וצורה**
- **שינוי ויחסים**
- **אי-ודאות ונתונים**

הגדרותיהם של תחומים אלה יופיעו בפרק הבא – חלקו העיקרי של הניתוח שלנו באשר להישגיהם של תלמידי ישראל במתמטיקה.

## ההישגים של תלמידי ישראל מתוך התבוננות בפריטי המבחן

אף שהתיאורים של רמת הבקיאיות מאפשרים להבין במידת מה את השתנות סולם הקושי במחקר פיזה, הם מציינים תמונה כללית בלבד של תחום המתמטיקה במחקר. לא קל לפרש על פי תיאורים אלו את תוצאות פיזה ולהמליץ על פעולות מעשיות שעל בתי הספר או המורים לנקוט כדי לשפר את המיומנויות המתמטיות של התלמידים. לכן החלטנו לנתח את הישגיהם של תלמידי ישראל בתחומי התוכן לצד ניתוח מפורט של הישגיהם בפתרון של קבוצת פריטים דומות. קיבצנו את תוצאות הניתוח המפורט של כל פריט ופריט בנספח א. אנחנו מעודדים את הקוראים לעיין בחומר נרחב זה ולהסיק מסקנות נוספות. להלן מדריך למבנה התיאור של כל פריט.



לכל פריט במחקר פיזה יש דף ייעודי בגיליון המצורף בנספח א. בפינה השמאלית העליונה של כל דף מופיעים המדדים הבסיסיים של הפריט:

**מספר הזיהוי של הפריט (item id)** – קוד הפריט, כפי שהוא מופיע במאגר הנתונים של OECD;

**שם הפריט (item name)** – השם הרשמי של הפריט. לרוב מצורף אליו מונח כגון Q01, שפירושו שאלה 1 ביחידה שמכילה עוד פריט אחד לפחות באותו הקשר. כאשר שם הפריט מופיע על רקע אדום, פירושו הדבר שהתיאור של

הפריט עדיין חסוי. כאשר שם הפריט מופיע על רקע ירוק, פירוש הדבר שהתיאור של הפריט אושר לפרסום. לנוחות הקוראים במקרה כזה, צירפנו את טקסט התיאור של הפריט בנספח ב;

**פורמט הפריט (item format)** – סוגי הפורמטים מבחינים בין פריטים עם תשובות בחירה לבין פריטים עם תשובה פתוחה מובנית. פריטי תשובות הבחירה כוללים פריטי רב-ברירה פשוטים, פריטי רב-ברירה מורכבים, שבהם צריכים התלמידים לבחור את התשובות הנכונות מתוך סדרה של פריטי רב-ברירה, ובמקרה של פריטים מבוססי מחשב – מתוך "וריאציות של תשובות בחירה" למשל בחירה מתוך אפשרויות שונות בתפריט נפתח. פריטי התשובה הפתוחה המובנית כוללים פריטים שאפשר לתת להם ציון באופן פשוט (כגון ציון במספר אחד או במשפט פשוט, וכשמדובר בפריטים מבוססי המחשב – תשובות שאפשר לעבד ולקודד אוטומטית), ופריטים אחרים שדורשים ציון וקידוד על ידי מומחים (כלומר תשובות שכוללות הסבר או דרך חישוב ארוכה);<sup>6</sup>

**תוכן (content)** – אחד מארבעה תחומי תוכן עיקריים: **כמות, מרחב וצורה, שינוי יחסים, אי-ודאות ונתונים**. להלן ההגדרות הרשמיות של תחומים אלו מתוך המסגרת המושגית של פיזה:

- קטגוריית התוכן **כמות** כוללת כימות תכונותיהם של עצמים, יחסים, מצבים וישויות בעולם, הבנת דרכי ייצוג שונות לכמויות אלה ושיפוט של טיעונים שמבוססים על כמות. כדי לעשות זאת יש להבין מושגים של מידות, ספירות, סדרי גודל, יחידות, מדדים, גודל יחסי, מגמות ודפוסים של מספרים, וליישם תובנות מספריות, מגוון ייצוגים למספרים, חישוב בעל פה ואומדן והערכה של סבירות (reasonableness) התוצאות.
- קטגוריית התוכן **אי-ודאות ונתונים** כוללת שני מערכי נושאים הקשורים זה לזה: זיהוי וסיכום של מסרים שמוטמעים במערכי נתונים המיוצגים בדרכים שונות, והערכת ההשפעה הצפויה של ההשתנות האינהרנטית בתהליכים אמיתיים רבים. אי-ודאות קיימת בחיזויים מדעיים, בתוצאות של סקרים, בתחזיות מזג אוויר ובמודלים כלכליים; השתנות קיימת בתהליכי ייצור, בתוצאות מבחנים ובמצאי סקרים; ומונח ה"סיכוי" הוא חלק מפעילויות פנאי רבות שאנשים נהנים מהן. הסתברות וסטטיסטיקה, שנלמדות כחלק ממקצוע המתמטיקה, עוסקות בנושאים האלה.
- קטגוריית התוכן **שינוי יחסים** מתמקדת במספר רב של יחסים זמניים וקבועים בין עצמים ונסיבות, בשינויים שמתרחשים בתוך מערכות של עצמים שקשורים זה בזה או בנסיבות שבהן האלמנטים השונים משפיעים

<sup>6</sup> ציטוט מדוח פיזה לשנת 2012, עמ' 40.

זה על זה. חלק מהשינויים האלה מתרחשים לאורך זמן. במקרים אחרים השינויים באחד העצמים או באחת הכמויות קשורים לשינויים בכמויות או בעצמים אחרים. השגת אוריינות טובה בקטגוריית תוכן זו כרוכה בהבנה של סוגי השינוי הבסיסיים ובהבחנה מתי הם מתרחשים כדי להשתמש במודלים המתמטיים המתאימים לתיאור ולחיזוי השינוי.

- קטגוריית התוכן **מרחב וצורה** מתייחסת למגוון רחב של תופעות שמתחוללות בכל מקום: זיהוי דפוסים, זיהוי מאפיינים, מיקומים וכיוונים של עצמים, ייצוגים של עצמים, פענוח וקידוד של מידע חזותי, ניווט ואינטראקציה דינמית עם צורות אמיתיות ועם ייצוגים של צורות. תחום הגאומטריה הוא חלק חשוב בקטגוריה הזו, אך מבחינת התוכן, המשמעות והשיטה הוא חורג מהגאומטריה המסורתית, וכולל גם נושאים מתחומים מתמטיים אחרים כגון ויזואליזציה מרחבית, מדידה ואלגברה. אוריינות מתמטית **במרחב וצורה** כוללת הבנה של פרספקטיבה, יצירת מפות וקריאתן, שינוי של צורות באמצעות טכנולוגיה ובלעדיה, פענוח תמונות תלת-ממדיות מפרספקטיבות שונות ובניית ייצוגים של צורות<sup>7</sup>;

**הקשר (context) –** קטגוריות ההקשר מתייחסות לבעיות בארבעה הקשרי חיים:

- **הקשר אישי –** בעיות שעניינן חיי היומיום של האדם ובני משפחתו;
  - **הקשר חברתי –** בעיות שעניינן הקהילה המקומית, הלאומית או הגלובלית שבה האדם חי;
  - **הקשר תעסוקתי –** בעיות שעניינן עולם העבודה;
  - **הקשר מדעי –** בעיות שעניינן שימוש במתמטיקה בנושאים הקשורים למדע ולטכנולוגיה.
- לפי המסגרת המושגית של מחקר פיזה, ארבע הקטגוריות האלה זוכות לייצוג שווה של פריטים במבחן;

**תהליך (process) –** ניסוח, יישום או פירוש, כמתואר בפרק הקודם;

ת"נ (תשובות נכונות) בעולם 2012 (World corr) – שיעור התשובות הנכונות של תלמידים ברחבי העולם;  
 ת"נ בישראל 2012, 2015, 2018 (Israel corr) – שיעור התשובות הנכונות של תלמידי ישראל במחזורי מחקר פיזה בשנים 2012, 2015 ו-2018. אם חסר מספר, פירוש הדבר שהפריט אינו נמצא במחזורי פיזה המאוחרים יותר;

<sup>7</sup> ציטוט מדוח פיזה לשנת 2012, עמ' 38.

**מיקום ישראל (Israel's position) 13/69** – במקרה זה המשמעות היא ששיעור התשובות הנכונות של תלמידי

ישראל ממקם אותם במקום ה-13 מתוך 69 מדינות שתלמידיהן פתרו את הפריט הזה;

**סולם פיזה (PISA scale)** – ערך הפריט בסולם פיזה;

**רמת פיזה (PISA level)** – רמת הבקיות המתמטית שאליה משתייך ערכו של הפריט.

בחלק העליון של הדף, מימין למדדי הפריטים, תיארנו את הדרישה המתמטית העיקרית של הפריט שנוסח, בלי לחשוף את הטקסט של הפריטים החסויים.

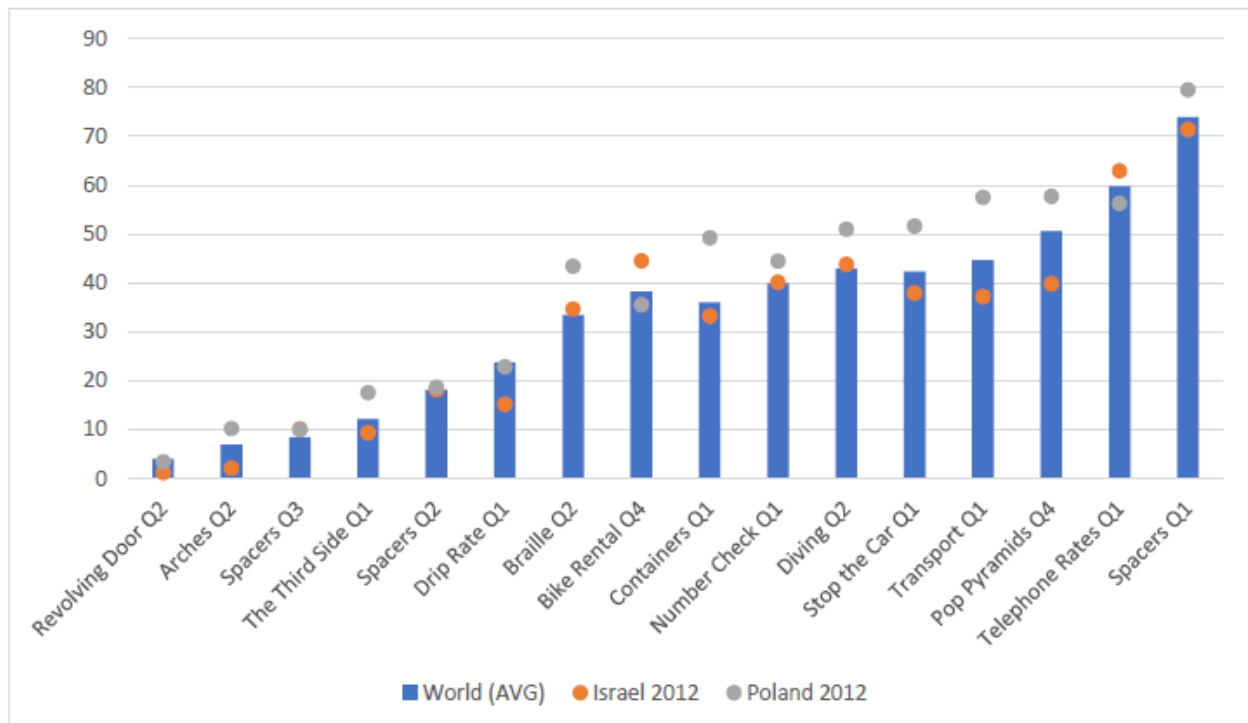
מתחת לתיאור, משמאל, הצבנו את רשימת המדינות שתלמידיהן פתרו את הפריט המסוים הזה, בסדר יורד – לפי שיעור התלמידים שהצליחו לענות על הפריט נכונה (עמודת **ת"נ כולם [corr-all]**). בשתי העמודות הבאות מופיעים שיעורי התשובות הנכונות של בנים (**ת"נ בנים [corr-boys]**) ושל בנות (**ת"נ בנות [corr-girls]**) בהתאמה. בעמודה שכותרתה **אין תשובה (missing)** מופיעים שיעורי התלמידים שלא ניסו אפילו לפתור את הפריט.

ברשימת המדינות תוכלו למצוא גם את המיקומים בקטגוריות **AVG (ממוצע) ו-TOT (ממוצע כללי)**. המספר הראשון הוא ממוצע הממוצעים של תוצאות המדינות החברות ב-OECD. המספר השני הוא התוצאה הממוצעת של כל התלמידים שחיים במדינות ה-OECD – כאילו התגוררו כולם במדינה אחת.

לבסוף, בחלק התחתון מימין תמצאו גרף המציג את ההתפלגות של תוצאות תלמידי ישראל לעומת התלמידים בעולם לפי עשירונים. כך יצרנו את הגרפים האלה: סידרנו את כל תלמידי ישראל לפי ציונם הסופי במחקר פיזה. לאחר מכן חילקנו רשימה זו ל-10 קבוצות. קבוצה 1 מייצגת את עשירון (10%) התלמידים הישראלים שהשיגו את התוצאות הנמוכות ביותר במחקר פיזה; קבוצה 10 מייצגת את עשירון (10%) התלמידים הישראלים שהשיגו את התוצאות הגבוהות ביותר במחקר פיזה. בכל אחת מהקבוצות האלה מסומן שיעור התלמידים שפתרו את הבעיה – זהו הקו הכחול בתרשים. הקו הכתום נוצר באופן דומה, אולם הוא מייצג את אוכלוסיית כל התלמידים בעולם שפתרו בעיה ספציפית זו במחקר פיזה 2012. השוואת התפלגויות אלה הייתה כלי מפתח במחקר שערכנו על התוצאות של תלמידי פולין – ואנו מיישמים אותו גם כעת.

נדרשנו לקבל החלטה מכריעה בשאלה אילו נתוני רקע לבחור לשם השוואה עם ההישגים של תלמידי ישראל. החלטנו שנתוני העולם כולו ישמשו נתוני רקע. אפשרות נוספת הייתה לבחור בממוצע של מדינות ה-OECD,

או בממוצע של מדינה מסוימת אחת. דילמה זו התעוררה בשנת 2003, ואז החלטנו להשוות את הישגים של תלמידי פולין לתלמידי העולם כולו, כיוון שרק בחירה כזו מאפשרת לנו להבחין בחלק מהיתרונות של תלמידינו. כדי להדגים דילמה זו נתבונן בתרשים הבא, שמייצג את התוצאות ב-16 פריטים ברמות קושי משתנות שדרשו, לדעתנו, יישום רב של חשיבה מתמטית.



העמודות הכחולות מייצגות את השיעור הממוצע של תשובות נכונות בעולם; הנקודות הכתומות מייצגות את תוצאות התלמידים הישראליים; והנקודות האפורות – את תוצאות התלמידים הפולנים. מן התרשים עולה שבפריטים מסוימים קיבלו התלמידים הישראליים תוצאות טובות מהממוצע בעולם. כללנו בתרשים את התוצאות של תלמידי פולין כדי להדגיש שהתוצאות של תלמידי פולין בשנת 2003 היו נמוכות מהתוצאות הישראליות ב-2012. בחלוף השנים, ככל שתלמידי פולין התקדמו, התחלנו לערוך ניתוחים כאלה מתוך התייחסות לתוצאות הממוצעות של מדינות ה-OECD. אנו מאמינים כי בקרוב אפשר יהיה להשוות גם את תלמידי ישראל למדינות ה-OECD, וכי תוצאותיהם יגיעו לנקודות האפורות ואף יעברו אותן.

## תובנות בנוגע לתוצאות של תלמידי ישראל בתחומי התוכן השונים

מסקירת כל הפריטים עולה בבירור כי יש הבדלים משמעותיים בין התוצאות של תלמידי ישראל בארבעת תחומי התוכן. הממוצעים בכל תחום, המצוטטים בדוח הבין-לאומי, מאשרים תובנה זו.

תלמידי ישראל השיגו את התוצאה הממוצעת הטובה ביותר (480) בפתרון בעיות בתחום הכמות. רמת הקושי בתחומים **שינוי ויחסים** ו**אי-ודאות ונתונים** הייתה דומה, אולם ההישגים בהם היו נמוכים באופן ניכר (462 ו-456 בהתאמה). בתחום **מרחב וצורה** ניכרו הקשיים הגדולים ביותר: התוצאה הממוצעת בתחום זה הייתה **449** נקודות בלבד. הנתונים האלה דווחו ב-2012; שני מחקרי פיזה העוקבים לא התמקדו במתמטיקה, ולכן סולמות המשנה של תחומי התוכן האלה לא דווחו.

נתבונן מקרוב בתחומים האלה. בתכנון המחקר זכו תחומי התוכן לייצוג זהה – כל אחד יוצג על ידי 21 פריטים. בטבלה הבאה מצוין מספר הפריטים בכל תחום שהיו קשים יותר, קלים יותר או באותו קושי לתלמידי ישראל בהשוואה לממוצע תלמידי העולם:

כמות	שינוי ויחסים	אי-ודאות ונתונים	מרחב וצורה	
7	12	14	18	ישראל > עולם
2	3	2	1	ישראל ≈ עולם
12	6	5	2	ישראל < עולם

מנקודת מבט זו הבעיה בפתרון פריטים שמייצגים את התחום **מרחב וצורה** ניכרת עוד יותר. הסטטיסטיקה הנוגעת להשמטות, כלומר לחוסר מענה על פריט, מאששת גם היא תובנה זו. ראוי להזכיר שפריט נחשב חסר ("אין תשובה") רק אם התלמיד דילג עליו לגמרי במהלך פתרון המבחן, ולא השאיר בחוברת התשובות ולו רמז קל לכך שניסה לפתור את הבעיה המופיעה בפריט.

ככלל, תלמידי ישראל השמיטו בממוצע פריטים רבים מאלה שהשמיטו תלמידי העולם. לעיתים נדירות בלבד (ב-6 פריטים מתוך 84) היה המצב הפוך ושיעור קטן יותר של תלמידים ישראלים השמיט פריטים בהשוואה לתלמידי העולם.



שניים מהפריטים הללו משתייכים לתחום **הכמות**, 3 לתחום **שינוי יחסים** ופריט אחד לתחום **מרחב וצורה**. להלן רשימת הפריטים הללו:

PM828Q01 (דו-תחמוצת הפחמן), **שינוי יחסים**, PISA רמה 5

PM943Q01 (קשתות), **שינוי יחסים**, PISA רמה 3

PM486Q02 (משיכת כסף), **שינוי יחסים**, PISA רמה 2

PM192Q01T (מיכליות), **כמות**, PISA רמה 4

PM800Q01 (משחק מחשב), **כמות**, PISA רמה 1

PM033Q01 (תצפית על החדר), **מרחב וצורה**, PISA רמה 2

בטבלה הבאה מוצגת השוואה בין התפלגות שיעורי ההשמטה הממוצעים המחושבים לכל תחום תוכן בישראל ובעולם והיחס ההדדי ביניהם.

יחס הדדי	ישראל/העולם	%% אין תשובה, ישראל	%% אין תשובה, העולם	
1.23	6.8	8.4		<b>כמות</b>
1.33	7.5	10.0		<b>אי-ודאות ונתונים</b>
1.26	17.3	21.8		<b>שינוי יחסים</b>
1.58	14.1	19.4		<b>מרחב וצורה</b>

גם כאן נראה כי התחום **מרחב וצורה** הוא הבעייתי ביותר. עם זאת עלינו לזכור כי רמת הקושי של הפריט אינה בהכרח הסיבה היחידה להשמטתו. במחקר שערכנו על הנתונים של תלמידי פולין, נתקלנו במקרים שבהם התלמידים לא ענו על פריטים קלים מתוך שעמום, שנבע מחשיפה מוגברת לבעיות מסוג דומה בבית הספר.

עוד עלינו לציין כי רמות הקושי הממוצעות של הפריטים בארבעת תחומי התוכן היו שונות. הפריטים בתחום **הכמות** היו הקלים ביותר (רמת קושי ממוצעת של 487), ולאחריהם הפריטים בתחום **אי-ודאות ונתונים** (רמת קושי ממוצעת של 522). התחום **שינוי יחסים** היה קשה יותר באופן ניכר (רמת קושי ממוצעת של 580), אולם **מרחב וצורה** היה התחום החשוב מכול, ורמת הקושי הממוצעת בו הייתה 599.

בטבלה הבאה מוצגת התפלגות הפריטים ברמות הבקיאיות בפיהה.

	> רמה 1	רמה 1	רמה 2	רמה 3	רמה 4	רמה 5	רמה 6
<b>מרחב וצורה</b>	0	1	3	4	4	3	6
<b>שינוי ויחסים</b>	0	0	5	3	4	6	3
<b>אי-ודאות ונתונים</b>	2	2	3	5	5	3	1
<b>כמות</b>	2	2	3	8	5	1	0
<b>Σ</b>	4	5	14	20	18	13	10

ההבדלים בין תחומי התוכן ברמת הקושי לא תוכננו כך מראש, כמובן. נראה כי תחום הגאומטריה קשה יותר (בממוצע) לתלמידים בכל העולם. למרות זאת נדגיש כי במדינות רבות, ובהן פולין, לא ניכרו הבדלים מהותיים בין התוצאות בתחומי התוכן השונים.

ההבדלים שנצפו יכולים להועיל למבקשים לבדוק כיצד לשפר את התוצאות של תלמידי ישראל ברמות הגבוהות ביותר: 5 ו-6. כפי שאנו מבינים זאת, שיפור התוצאות הוא אחד מסדרי העדיפויות של קרן טראמפ. מנקודת מבט זו נראה כי כדאי להשקיע בבעיות של **מרחב וצורה**.

המסקנה הכללית הנובעת מהנתונים שלעיל היא שתלמידי ישראל חלשים מתלמידי העולם בפתרון בעיות בגאומטריה. ראוי לציין שאף שרמות הקושי הממוצעות של הפריטים בתחומי התוכן **מרחב וצורה** ו**שינוי ויחסים** אינן שונות מאוד זו מזו (הבדל של 19 נקודות בסולם פיזה), הפריטים בתחום הגאומטריה היו בעייתיים יותר לתלמידי ישראל. עם זאת אף שרמות הקושי הממוצעות של פריטים בתחומי התוכן **שינוי ויחסים** ו**אי-ודאות ונתונים** משתנות באופן ניכר (הבדל של 42 נקודות בסולם פיזה), התלמידים הישראליים פתרו פריטים בתחומים אלה במידה דומה של הצלחה. לכן אין ברמת הקושי של הפריטים לבדה כדי להסביר את הקשיים בתחומי התוכן השונים. נראה כי היכולת לפתור בהצלחה פריטים בתחום התוכן **שינוי ויחסים**, למרות רמות הקושי הגבוהות יחסית, נובעת מהדמיון ביניהם לבין המתמטיקה הפורמלית שנלמדת בבית הספר.

משאלון התלמידים עלה שתלמידי ישראל רואים במתמטיקה הנלמדת בבית הספר ידע פורמלי, הנרכש בתרגול של מגוון הליכים פורמליים. לכן למרות שהידע שלהם יכול להיות מיושם בקלות בעולם האמיתי, הם עדיין טוענים שהם

נחשפים למעט מאוד מתמטיקה שימושית בכיתה. סביר להניח שהוצגו להם מטלות ובעיות הנוגעות ליישום של כלים מתמטיים בהקשרים של העולם האמיתי, אולם הם לא תפסו אותם כמתמטיקה אמיתית, כיוון שלא התלוו אליהם הליכים שיש לפעול לפיהם בעתיד.

אם הנחה זו נכונה הבעיה טמונה בפדגוגיה, שמתמקדת בהצגת רצף של מושגים מתמטיים, ומדריכה את התלמידים כיצד להשתמש בהם באופן שוטף במערך מוגדר היטב של פעולות מתמטיות, במקום לראות בכלים האלה כלים גמישים שאפשר ליישם באופן יצירתי במהלך פתרון הבעיות – גם אם אלה לא תורגלו בכיתה.

כמובן, אותה מטלה יכולה להיות תרגיל שגרתית לגמרי עבור תלמיד אחד, בעוד שתלמיד אחר יסיק הסקה (reasoning) מעמיקה כדי להגיע לפתרון. עם זאת כשאנו מתבוננים בנושא הזה מנקודת מבט סטטיסטית, ניכרת חוקיות מסוימת בפרקטיקות ההוראה הנפוצות ביותר. לדוגמה, כשאנו עדים לשיעור גבוה של השמטות בפריט או בקבוצה של פריטים, נוכל לשער שנדרשו בהם מהתלמידים מיומנויות מתמטיות שחורגות מאלה המתורגלות בבית הספר. בו בזמן שיעורי ההשמטה הגבוהים מצביעים על כך שרק מיעוט קטן מאוד בקרב התלמידים מוכנים לפצות, או לפחות לנסות לפצות, על היעדר הליך "מוכן לשימוש" – וליישם חשיבה מתמטית עצמאית.

בעיה דומה ניכרה בנתונים של תלמידי פולין בשנת 2003. החלטנו להכניס לפרקטיקה הבית-ספרית בעיות שדורשות חשיבה מתמטית וחשיבה אסטרטגית. כיוון שרצינו לשפר את המיומנויות המתמטיות של כלל אוכלוסיית התלמידים, הכנסנו פריטים שמחייבים שימוש בהסקה ברמות קושי שונות – מהרמה הקלה ביותר ועד רמה מתקדמת למדי. הדבר דרש, כמובן, שינוי ניכר בפרקטיקות ההוראה. השגנו זאת בכך שהטמענו דרישות חדשות במבחנים הארציים, ואלה הובילו לשינוי בפדגוגיה. הפעולה הייתה אפקטיבית, כיוון שהדרישה להכין את התלמידים למבחנים עוררה מוטיבציה חזקה מאוד בקרב המורים.

איננו טוענים שמהלך כזה אפשרי בכל מדינה ומדינה, או שמהלך כזה – גם אם יוטמע – יוביל לשינוי חיובי כפי שקרה בפולין. עם זאת אנחנו משוכנעים לחלוטין כי אפשר להציג לתלמידים בעיות הסקה שרמתן קלה דייה לעודד גם את התלמידים החלשים יותר להיעזר בחשיבה יצירתית בשיעורי המתמטיקה. אפשר למצוא דוגמאות לבעיות כאלה בחוברות הבחינה לחטיבות הביניים שלנו במהלך ביקור המחקר של קרן טראמפ בפולין.

עם זאת כלי העבודה העיקרי והחשוב ביותר הוא הוראה מהסוג הנכון, שמאפשר לתלמידים לעבוד בעצמם כדי להתגבר על קשיים ולמצוא פתרונות. כלי העבודה הזה אינו זוכה לתמיכה ממורים שמתמשים בשיטת הוראה סמכותנית, ומודדים את הצלחתם המקצועית לפי מידת היכולת של תלמידיהם לשחזר הליכים טיפוסיים.

זיהינו כמה סוגי פריטים שכדי לפותרם היו מוכנים חלק ניכר מתלמידי ישראל לבצע ניתוח שחורג מהרוטינות בבית הספר. בפריטים האלה התבקשו התלמידים לנתח את הפונקציונליות של אלגוריתם מוגדר היטב ולדון בהתאמות האפשריות שלו, למשל בשאלה PM411Q01 (צלילה).

עם זאת זיהינו גם שבעה פריטים שהיו קשים במיוחד עבור התלמידים הישראלים בהשוואה לתלמידי שאר

העולם:

פריט	שם	תוכן	סולם	רמת בקיאות בפיה	תשובות נכונות ישראל	תשובות נכונות בעולם	ממוצע "אין תשובה" בישראל	ממוצע "אין תשובה" בעולם
PM943Q02	קשתות שאלה 2	מרחב וצורה	785	6	2.2	6.9	36.7	26.1
PM00GQ01	עמוד פרסום שאלה 1	מרחב וצורה	760	6	3.8	7.7	15.7	10.8
PM00KQ02	כדורסל בכיסאות גלגלים שאלה 2	מרחב וצורה	700	6	4.9	14.0	17.9	10.1
PM406Q02	מסלול ריצה שאלה 2	מרחב וצורה	696	6	8.2	14.2	58.6	42.5
PM464Q01T	הגדר שאלה 1	מרחב וצורה	652	5	13.9	21.0	23.7	18.3
PM406Q01	מסלול ריצה שאלה 1	מרחב וצורה	645	5	12.0	22.0	34.8	24.3
PM423Q01	הטלת מטבעות שאלה 1	אי-ודאות ונתונים	401	1	64.5	74.5	2.7	1.8

שימו לב ששישה מהפריטים הללו משתייכים לתחום התוכן **מרחב וצורה**, וכולם ברמת הבקיאות החמישית או השישית בפיזה. לפריטים האלה יש כמה תכונות משותפות:

- הם כוללים תרשים גאומטרי מורכב או מצב בלתי שגרתי, כמו תנועה או הצורך לקשר בין מישור ומרחב בגאומטריה;
- נדרש בהם תכנון של תהליך הפתרון, הכולל כמה שלבים;
- אין נוסחה שאפשר להריץ בה את הנתונים שקיימים בפריט;
- התלמידים חייבים להשוות את המאפיינים של יותר מתרשים אחד.

כל התכונות האלה מחייבות את התלמידים לקבל החלטות עצמאיות ובלתי שגרתיות במהלך פתרון הבעיה.

בשני פריטים מתחום התוכן **מרחב וצורה** השיגו תלמידי ישראל תוצאות דומות לאלה של תלמידי שאר העולם או טובות יותר:

פריט	שם	תוכן	סולם	רמת בקיאות בפיזה	תשובות נכונות- ישראל	תשובות נכונות- בעולם	"אין" תשובה" – ישראל	"אין" תשובה" – בעולם
PM949Q01T	תכנון קורה לגג שאלה 1	מרחב וצורה	2467	61.5	62.4	3.0	2.0	
PM949Q02T	תכנון קורה לגג שאלה 2	מרחב וצורה	4594	41.2	32.1	2.3	1.8	

כדי לפתור את שני הפריטים נדרשו רק כישורים שגרתיים שנלמדו בבית הספר – פעולות של שלב אחד שמסתמכות על השוואות בין קטעים או בין זוויות בתצורה גאומטרית טיפוסית שנלמדת בבית הספר. נראה כי הדוגמאות האלה תומכות בהשערה שלנו באשר למקור הקשיים של תלמידי ישראל בגאומטריה. גאומטריה היא תחום התוכן הפגיע ביותר, כיוון

שלא קל כל כך להפוך את הוראת הגאומטריה למערך של הליכים מתמטיים שצריך לזכור. למרות זאת בשני הפריטים שהזכרנו התאפשר הדבר.

הפריט הבעייתי האחרון עוסק בהסתברות. הוא בוחן את הבנת המושג "מאורעות בלתי תלויים", אך אין בו כדי לשמש בסיס להסקת מסקנה כללית.

כמו כן, ראוי להזכיר שבפריטים הדומים לבעיות גאומטריה טיפוסיות בבית הספר, לא היו שיעורי ההשמטה של תלמידי ישראל שונים באופן ניכר משיעורי ההשמטה בעולם. עם זאת בפריטים שלא דמו לבעיות הטיפוסיות שנלמדות בבית הספר היו שיעורי ההשמטה שלהם גבוהים באופן ניכר.

מידע נוסף שתומך במסקנות האלה עולה מההתפלגות של כל פריט לעשירונים. בפריט PM00GQ01 (עמוד פרסום) אפילו התלמידים הישראלים בעלי ההישגים הגבוהים ביותר היו מתחת לממוצע העולמי [ישראל 19%, העולם 34%]. כך גם בשאלה PM00KQ02 (כדורסל בכיסאות גלגלים) [ישראל 21%, העולם 49%] ובשאלה PM943Q02 (קשתות) [ישראל 16%, העולם 31%]. בשאלה PM406Q01 (מסלול ריצה) התלמידים הישראלים בשלושת העשירונים הגבוהים ביותר השיגו תוצאות נמוכות מהממוצע העולמי. כך גם בשאלה PM464Q01T (הגדר).

בניתוח התוצאות שהושגו בשאר הפריטים בתחום התוכן **מרחב וצורה**, יש לתת את הדעת במיוחד על יחידה "ספייסרים" (Spacers), ובה שלושה פריטים (PM992Q01-Q03). הפריטים הללו דרשו מהתלמיד ליישם חשיבה מתמטית כדי לספור עצמים בסיטואציה גאומטרית טיפוסית פחות, אם כי מעשית. בסוג הפריטים הזה הצליחו התלמידים הישראלים להשיג תוצאות הקרובות לממוצע העולמי.

בחינה מדוקדקת של היחידות "לבנים", "צינורות", "מפה", "תצפית על החדר" ו"סידור אריחים" מאשרת את הטענה כי תלמידי ישראל השיגו תוצאות נמוכות מהממוצע העולמי כמעט תמיד כאשר הפריט חרג מהגאומטריה הסטנדרטית שנלמדת בבית הספר וכשהמטלה דרשה פעולה עצמאית שמעבר לסכמות הטיפוסיות של פתרון בעיות שמתורגלות בבית הספר. ברור כי פריטים מסוג זה קשים יותר עבור התלמידים, אך אנו רוצים להדגיש את העובדה שהתלמיד הממוצע בעולם מתמודד עימם בהצלחה רבה יותר.

\*\*\*

בבחינת תחום התוכן **אי-ודאות ונתונים** היינו עדים למצב מעניין. התוצאה של תלמידי ישראל בפריט PM423Q01 (הטלת מטבעות) הייתה אחת הנמוכות ביותר. עם זאת בפריט PM408Q01T (כרטיסי לוטו) השיגו התלמידים הישראלים תוצאה טובה יותר מהממוצע העולמי [ישראל 38%, העולם 33%]. שני הפריטים בחנו את הבנת המושג "מאורעות בלתי תלויים"

ומצביעים על כך שהתוצאה אינה תלויה רק בתוכן המתמטי – להקשר שבו התוכן מוצג יש תפקיד חשוב. עם זאת היו ברשותנו מעט מדי פריטים מסוג זה מכדי לנסח מסקנה אחראית.

התלמידים הישראלים היו טובים כמו התלמידים הממוצעים בעולם בהתמודדות עם נתונים בטבלה, גם כשהיו צריכים להצליב את הנתונים עם מקור מידע אחר. תובנה זו זכתה לאישור בפריטים PM803Q01T (תוויות) ו- PM955Q02 (הגירה). ברצוננו להדגיש כי כאשר התבוננו בתרשימי העשירונים, מצאנו כי את התוצאות הטובות יחסית בפריטים אלו השיגו לא רק התלמידים הישראלים הטובים ביותר, אלא גם הטובים והממוצעים שבהם.

\*\*\*

נראה כי תחום התוכן **כמות** הוא הקל ביותר עבור תלמידי ישראל. תוצאות הפריטים בתחום זה מוכיחות כי התלמידים יכולים להתמודד בהצלחה עם מטלות שדורשות ניתוח של הליך או של אלגוריתם שניתן להם. דוגמה טובה לכך ניכרת בשני הפריטים PM411Q01-Q02 (צלילה), שבהם התוצאות של תלמידי ישראל בעשירונים 4 עד 8 היו טובות יותר מהתוצאות של עמיתיהם בעולם. כמו כן התלמידים הישראלים יכולים להתמודד בהצלחה עם ניתוח של אלגוריתם גם כשהוא מורכב למדי, למשל בפריט PM442Q02 (כתב ברייל) או בפריט PM603Q01T (בדיקת מספרים). תוצאות דומות הושגו בפריטים שדרשו אימות של קריטריון מסוים, למשל בפריטים PM906Q01-02 (נמלים משוגעות) או PM905Q01-02 (כדורי טניס).

חלק מהפריטים בתחום התוכן **כמות** דומים לתרגילים הטיפוסיים שנלמדים בבית הספר. לא קשה לזהות כלי מתמטי פשוט שנחוץ כדי לבצע את החישובים הנדרשים. עם זאת חלק מהפריטים האלה דורש חשיבה מתמטית, למשל כדי לתכנן את רצף החישובים. תובנה זו זוכה לאישוש בפריטים PM909Q01-Q03 (קנס על מהירות) ו-PM559Q01 (עלויות טלפון). תכנון כזה היה הכרחי לדוגמה בפריט PM564Q01-02 (מעלון כיסא), שבו הצליחו תלמידי ישראל יותר מתלמידי העולם בכל סולם העשירונים.

\*\*\*

הפריטים מתחום התוכן **שינוי ויחסים** שהיו קלים עבור תלמידי ישראל – למשל PM446Q01 (מדחום צרצר), PM828Q01-03 (דו-תחמוצת הפחמן) ו-PM99801-04 (השכרת אופנועים) – דרשו הבנה טובה של ההליך שתואר בטקסט של הפריט ולאחר מכן יישום של ההליך על נתונים מסוימים. תוצאות אלה עולות בקנה אחד עם התובנה הנוגעת ליכולת לנתח וליישם אלגוריתמים בתחום התוכן **כמות**.

תוצאות נמוכות הרבה יותר נצפו בפריטים שדורשים חשיבה מתמטית במהלך ניתוח של סיטואציה או הליך, כגון פריטים PM192Q01 (מכולות), PM571Q01 (עצרו את הרכב); ובפריטים שדורשים ניתוח נתונים מורכב יותר, למשל פריטים PM155Q01-04 (פירמידות אוכלוסייה), PM982Q01-04 (נתוני העסקה) או PM953Q02-04 (בדיקת שפעת).

תלמידי ישראל התקשו יותר מתלמידי העולם גם במטלות שבהן נדרשו לפרש נוסחה נתונה, למשל בפריטים PM954Q01-04 (מינון תרופות), PM571Q01 (עצרו את הרכב) או PM915Q01-02 (מס פחמן).



## מסקנות והמלצות

מחקר פיזה הוא כלי סטטיסטי, על כל המשתמע מכך. ראשית, ההערכות בפיזה מבוססות על מדידה של מדגם אקראי של תלמידים שנבחר בקפידה. פירוש הדבר שהמחקר משקף את ההשפעות של פרקטיקות ההוראה הנפוצות. בכך הוא עושה עוול למאמציהם של המורים הטובים ביותר, שעשויים להשיג תוצאות הוראה נפלאות, אולם מספרם נמוך מכדי להיתפס במסגרת המדגם. יש להביא את הנסיבות הללו בחשבון בעת העיון במסקנותינו.

התמונה הכללית שמצטיירת בתחום הוראת המתמטיקה בישראל היא שתלמידי חטיבות הביניים אינם עומדים בציפיות של המסגרת המושגית של פיזה במתמטיקה. הדבר משתקף ממערך הפריטים שמופיעים במחקר. נראה כי תלמידי ישראל רוכשים ידע מתמטי פורמלי המספיק לפתרון של בעיות מתמטיות טהורות המתאימות לגילם. עם זאת אנו חושבים שרוב התלמידים אינם אמיצים דיים לתקוף בעיות שאינן דומות לבעיות הסטנדרטיות שעליהן עבדו בבית הספר. במקרים רבים "לתקוף בעיה" פירושו פשוט "להתחיל לעבוד עליה". ייתכן שהדבר נובע מסגנון ההוראה. מורים רבים למתמטיקה ברחבי העולם מנסים להפוך את תחום המתמטיקה לתחום לימוד קל יותר, ולצייד את תלמידיהם בהליכים "מוכנים לשימוש". לאחר שהשימוש בהליכים האלה מתורגל די זמן, המורים והתלמידים גם יחד חשים שהתלמידים בקיאים במתמטיקה.

מחקר פיזה מביא לתשומת ליבנו, ובצדק, את העובדה הפשוטה שלעיתים רחוקות בלבד החיים האמיתיים מציבים בפנינו בעיות שאפשר לפותרן בדיוק בהליכים שתרגלנו. עם התפתחות הטכנולוגיה מכונות הן שמבצעות את ההליכים המתמטיים הבסיסיים ביותר. בזמן אנו נתקלים ביותר ויותר בעיות שמפתיעות אותנו, ובעצם נוכל לפתור אותן בקלות בכלים מתמטיים בסיסיים אם רק "נחשוב בצורה מתמטית". מחקר פיזה מכנה חשיבה זו בשם "חשיבה מתמטית". המורים הפולנים הופתעו מאוד לגלות שלא רק התלמידים בעלי ההישגים הטובים ביותר, אלה שמשתתפים באולימפיאדת המתמטיקה, מסוגלים לחשוב באופן מתמטי. יש בעיות מתמטיות נחמדות רבות, קלות מאוד מבחינת הצורה שלהן, אולם כדי לפתור אותן התלמידים צריכים לגלות קשר שבמבט ראשון אינו גלוי לעין. התמודדות עם סוג הקושי הזה בונה את הביטחון העצמי של התלמידים ומעודדת אותם לנסות שוב.

עם זאת הדרך היחידה לחזק מיומנות זו של חשיבה מתמטית היא לעשות זאת בעצמך. נדרש זמן כדי להתמודד עם ניסיונות לא מוצלחים. נדרשת גם סבלנות רבה מצידו של המורה, כיוון שהתוצאות הרצויות יגיעו רק כעבור זמן. הפיתוי להראות לתלמידים כיצד לפתור את הבעיה גדול מאוד, בעיקר מסיבות הקשורות לניהול זמן.

לסיכום, לדעתנו המטרה העיקרית של הוראת המתמטיקה היא לעורר בקרב התלמידים את האמונה שביכולתם לפתור כל בעיה שתוצג בפניהם. לכן ההמלצה הראשונה שלנו היא ללמד חשיבה מתמטית, להציע לתלמידים בעיות ברמות קושי משתנות ולבקש מהם למצוא דרך לפתור אותן לבדם.

התפיסה הכללית של פיזה היא שהוא עוסק במתמטיקה שימושית בלבד – רוב הפריטים בו מיוצגים בהקשר של העולם האמיתי. בהכנת פריטים אלו מושקע מאמץ רב בהצגת הקשר אותנטי. יחד עם זאת מחקר פיזה שואף למדוד את המיומנויות המתמטיות הבסיסיות דרך עדשת השימוש במתמטיקה בחיים האמיתיים. לכן לא כדאי ללמד את שימושי המתמטיקה רק בהדגמה של הליכים יעילים ו"מוכנים לשימוש" להתמודדות עם בעיות מעשיות. אסטרטגיה טובה יותר תהיה, לדעתנו, להתרכז במיומנויות הבסיסיות ולבקש מהתלמידים לגלות בעצמם כיצד יוכלו להשתמש בהן במגוון רחב של הקשרים. אסטרטגיה זו דורשת מהתלמידים לערוך ניסיונות יצירתיים ועצמאיים כדי להתגבר על הקשיים. למורים תפקיד חשוב בכך: עליהם להציע לכל תלמיד ותלמידה מטלות שיאפשרו להם לנחול הצלחה בניסיונות אלה. בהיעדר החופש לחפש פתרון [ולהתמודד לבד], היינו כשהמורה הוא שמכוון את תהליך פתרון הבעיות, הפתרונות הופכים להליכים שצריך לזכור לצורך שימוש עתידי. בהקשר של מחקר פיזה התלמידים מנסים אפוא להתאים את הפריט לאחד ההליכים שלמדו מראש, ומדלגים עליו אם אינם מצליחים לעשות זאת בקלות. הדבר מתבטא בשיעורים הגבוהים של פריטים ללא תשובה.

לבסוף, אנו מעודדים בחום את מורי ישראל להציג בעיות גאומטריות רבות יותר בכיתה. הבעיות האלה אלגוריתמיות פחות במהותן, ולכן אפשר להפעיל עליהן חשיבה מתמטית. אפשר לתמוך בבעיות האלה באמצעות ויזואליזציה (החזיה), הן בשרטוט חופשי הן בתוכנה ייעודית. כיוון שהפריטים שעוסקים בהקשר גאומטרי נמצאים לרוב בקצה הגבוה יותר של סולם הבקיאיות המתמטית בפיזה, זוהי הדרך הנכונה להעלות את שיעור התלמידים הישראלים ברמות 5 ו-6.

בהצלחה!