

- תרגום, תקציר ועריכה לצרכי עבודה¹ -

המסגרת המושגית במתמטיקה לקראת מחקר פיז"ה, 2021

OECD, 2019

מתמטיקה תהיה התחום המרכזי של מחקר פיז"ה בשנת 2021. מבחינתנו, זו הזדמנות לבחון מה צריך למדוד לאור השינויים שהתרחשו בעולם בתחום, ובשל ההתפתחות משמעותיות בפרקטיקות ההוראה של תחום המתמטיקה. חשוב להדגיש שלכל מדינה יש חזון משלה בנוגע ליכולות המתמטיות שחשובות עבורה. לכן היא מארגנת בהתאם את בתי הספר שלה כדי להשיג את התוצאה הרצויה מבחינתה. אבל, ישנם היבטים משותפים שחשובים לכל המדינות, שניצבים על שתי מדרגות: הראשונה היא בסיס מוצק של ידע ומיומנויות (פעולות, חישובים, וכו'), והשנייה היא השימושים במתמטיקה בחיים.

פיז"ה עוסקת במדרגה השנייה, משום שבמיוחד במאה ה-21, אנו זקוקים למתמטיקה כדי לקבל החלטות אישיות, לתכנן קריירה, לשמור על הבריאות ולנהל השקעות וסיכונים. אנו נדרשים למתמטיקה כדי להתמודד עם אתגרים חברתיים, כמו גידול האוכלוסייה, החוב הממשלתי, התפשטות מגיפות והתחממות גלובלית. כדי להתמודד עם האתגרים הללו צריך בסיס מוצק של ידע ומיומנות, אבל נדרשת גם חשיבה מתמטית והבנה מתמטית וחישובית. כבר לא מספיק לפתור תרגילים מוכרים – כיום צריך בנוסף לבסיס המתמטי, גם אספקטים מורכבים יותר.

מדוע צריך ללמוד מתמטיקה? באופן מסורתי, התשובה הנפוצה ביותר לשאלה הזו היא התועלת של המתמטיקה במגוון של מצבים מעשיים בחיים. אבל, הטיעון הזה נחלש עם הזמן, משום שהרבה מאוד פעולות בסיסיות עברו אוטומטיזציה. מלצרים כבר לא צריכים לחשב את התשר, ותיירים כבר לא חייבים להשתמש בלוחות זמנים ידניים כדי לתכנן את הטיול שלהם. כיום אנחנו לוחצים על כפתורים ומקבלים מענה מהיר זמין, ללא צורך במתמטיקה.

אז איזו מתמטיקה צריך ללמד? הרבה אנשים רואים את המתמטיקה כארגז כלים יעיל. הגישה הזו רווחת בהרבה מדינות, וכך הן גם בנו את תכנית הלימודים שלהן. זה בא לידי ביטוי ברשימה ארוכה של נושאים מתמטיים, או פרוצדורות, שתלמידים נדרשים לתרגל. אנו סבורים שתפיסה זו לגבי

¹ המאמר המקורי אשר פורסם ב - OECD

מושגים מתמטיים אשר יבחנו בפיז"ה 2021²

המתמטיקה היא תפיסה צרה מדי, היא מתעלמת מכלים מרכזיים וחשובים, והתוצאה שלה בפועל היא שהמצבים שתלמידים נדרשים להכיר בבית הספר, הם מצבים צפויים ומצומצמים שמופיעים בספר הלימוד, כאלו שקל לבחון במבחן.

התשובה שלנו, כמו גם של כמה מדינות פורצות דרך בתחום, היא שלכל תלמיד צריכה להינתן ההזדמנות ללמוד לחשוב בצורה מתמטית. עליו להשתמש בהיגיון מתמטי ולהיות מסוגל לפתור בעיות ולנמק את הפתרון, תוך שימוש במושגים ובכלים מתמטיים שתומכים בהיגיון המתמטי. הוא חייב לפתח 'מערכת הפעלה' מחשבתית, מסגרת רעיונית שהולכת ונבנית בראשו, ושדרכה יוכל להתמודד עם הממדים הכמותיים של החיים במאה ה-21.

מטרתנו במסמך שלפניכם, היא לפשט ולהבהיר את הרלבנטיות של מקצוע המתמטיקה לתלמיד בן 15 בעידן הנוכחי. המסמך הזה אינו עומד בפני עצמו, הוא עדכון של מסמכים קודמים שפרסמנו

בשנים שעברו, שבהם הצגנו את המבנה של מחקר פיז"ה בתחום המתמטיקה. המבנה הזה ברובו נותר על כנו, ועיקרו מכוון לאפשר לנו להעריך את התהליך המתמטי שבו תלמידים עוסקים כשהם פותרים בעיות.

חידוש שיוכנס ב-2021 ולא היה קודם לכן, בא לידי ביטוי בהכרה שתלמידים כיום צריכים לשלוט בכישורים של חשיבה חישובית כשהם ניגשים למתמטיקה כחלק ממיומנות של פתרון בעיות. כישורי חשיבה חישובית כוללים הכרת תבניות, תכנון ושימוש בהפשטה, פירוק תבניות, קביעה של איזה (אם בכלל) כלים חישוביים יכולים להיות מיושמים בניתוח או בפתרון בעיה והגדרת אלגוריתם כחלק מפתרון מפורט.

מסמך זה נכתב על ידי קבוצת מומחים שכללה מתמטיקאים, סטטיסטיקאים, מורים למתמטיקה, מומחים בהערכה, אנשי טכנולוגיה ואנשי מחקר חינוכי ממגוון מדינות. לצד הקבוצה, פעלה קבוצת מבקרים עמיתים, שכללה מומחים מתתי-תחומים שונים של המתמטיקה. ההמלצות הועברו לביקורת של מומחים ממעל ל-80 מדינות, וכן בוצע סקר אימות בקרב מורים, אוניברסיטאות ומעסיקים, וכן קבוצות מיקוד של תלמידים.

מהי אוריינות מתמטית?

מתמטיקה היא כלי חיוני לאנשים צעירים כאשר הם מתמודדים עם אתגרים במגוון תחומים בחייהם. הערכת היכולת הזו בקרב בני נוער בגיל 15 נותנת אינדיקציה מוקדמת טובה כיצד הם עשויים להגיב לסיטואציות שבהן ייפגשו בהמשך חייהם. חשוב להדגיש שאין הכוונה רק לבחון את הידע המתמטי

³ השימוש במונח 'אוריינות' על-ידי ה-OECD עלול לבלבל, ובטעות יש הסבורים כי הכוונה היא לכישורים בסיסיים בלבד, למדרגה ראשונה, כדוגמת ידיעת קרוא וכתוב. לפי אונסק"ו, הכוונה היא ליכולת בדרגות שונות ומתגברות - כלומר, לזהות, להבין, לפרש, ליצור, לתקשר ולתכנת, תוך שימוש במידע בהקשרים שונים. במחקר פיז"ה רמות האוריינות מדרגות מרמה 1 הבסיסית ועד רמות 5-6, רמות המצוינות.

של הצעירים, וגם לא להסתפק ברמות נמוכות של יישום של המתמטיקה. הכוונה היא ליכולת שלהם לטעון טיעון מתמטי, תוך שימוש במושגים, בפרוצדורות ובכלים, כדי לתאר, להסביר ולחזות תופעות.

לכן, התפיסה שאנחנו מציגים של אוריינות מתמטית, היא תפיסה שמעניקה חשיבות ליכולת של תלמידים לפתח הבנה מושכלת של מושגים ותהליכים מתמטיים, ולהבין את היתרונות של ביצוע חקירות מתמטיות בעולם האמיתי באמצעות המתמטיקה שהם אוחזים בה. אנו מדגישים מאוד את היכולת של תלמידים להשתמש במתמטיקה בתוך הקשר. לכן חשוב שיהיו להם חוויות מעשירות בכיתות המתמטיקה שלהם כדי להשיג זאת.

אנו מגדירים אוריינות מתמטית כיכולת של אדם לחשוב בצורה מתמטית - לנסח, ליישם ולפרש מתמטיקה כדי לפתור בעיות במגוון תחומים בעולם האמיתי. זה כולל נושאים, תהליכים, עובדות וכלים, על מנת להסביר, לתאר ולנבא תופעות. אוריינות מתמטית עוזרת לאדם להבין את התפקיד שמתמטיקה ממלאת בעולם ועוזרת לכולנו לקבל החלטות בשיקול דעת יציב, כל זאת כדי שיהיו לנו אזרחים מעורבים המכוונים למאה ה-21.

מסגרת פיז"ה 2021 מכירה במספר תזוזות בעולמו של התלמיד. המגמה היא להתרחק מהצורך לבצע חישובים בסיסיים, לעבר עולם המשתנה במהירות, אשר מונע על ידי טכנולוגיות ומגמות חדשות בהן האזרחים הם יצירתיים ומעורבים. בעולם כיום ישנם נושאים מתמטיים הנקשרים בתחומי המחשוב, בדגש לתפקיד הולך וגובר של חשיבה חישובית לצד ובתוך החשיבה המתמטית.

כיצד מתבטאת האוריינות המתמטית בפיז"ה 2021?

המוקד של אוריינות מתמטית הוא פתרון בעיות בעולם האמיתי בעזרת מתמטיקה במגוון הקשרים. לשם כך, האוריינות המתמטית נסמכת על הבנה מתמטית (דדוקטיבית ואינדוקטיבית) ועל פתרון בעיות בעזרת מושגים, פרוצדורות, עובדות וכלים על מנת לתאר, להסביר ולפרש תופעות. ההיגיון המתמטי והיכולת לנמק את הפתרון המתמטי הם היבטים מרכזיים.

על מנת שהתלמידים יהיו אוריינים מתמטית הם חייבים להיות מסוגלים, תחילה להשתמש בידע המתמטי שלהם כדי להכיר את האופי המתמטי של הבעיה שמולה הם ניצבים. הכוונה למצבים מהעולם האמיתי, שאינם מוצגים באופן מתמטי. בשלב ראשון המשימה של התלמידים היא לנסח את הבעיה במונחים מתמטיים. הטרנספורמציה הזו - ממצב מבולגן ומציאותי לבעיה במודל מתמטי מוגדר היטב, דורשת ידע מתמטי וחשיבה מתמטית.

לאחר שהתרגום מהעולם האמיתי אל המודל המתמטי מתבצע בהצלחה, יש לפתור את הבעיה המתמטית המתקבלת באמצעות מושגי המתמטיקה, האלגוריתמים והפרוצדורות הנלמדים בבתי הספר. עם זאת, השלב הזה עשוי לדרוש גם קבלת החלטות אסטרטגיות לגבי בחירת כלים וסדר היישום. ולבסוף, התלמיד צריך להעריך את הפתרון המתמטי על ידי פירוש התוצאות בעולם האמיתי.

בנוסף, על התלמידים גם להיות מסוגלים להפגין כישורי חשיבה חישוביים כחלק מתרגול פתרון הבעיות. כישורי חשיבה חישוביים אשר מיושמים בניסוח, שימוש, הערכה והנמקה כוללים זיהוי תבניות, פירוק, קביעה אילו (אם בכלל) כלים חישוביים יכולים להיות רלבנטיים בניתוח או בפתרון הבעיה והגדרת אלגוריתמים כחלק מפתרון מפורט.

חשוב להדגיש כי בראייתנו, פתרון בעיות מתמטיות הוא רק חלק מההתייחסות הרחבה יותר אל החשיבה המתמטית. כלומר, אוריינות מתמטית מאפשרת לפתור בעיות מהעולם האמתי באמצעות כלים מתמטיים, אבל החשיבה המתמטית היא יותר מכך. היא כוללת את אותן הכרעות לגבי התוקף של המידע, היכולת להבחין בין עיקר לטפל, לפרש מידע ולטעון טענות חברתיות שיסייעו להבנה רחבה יותר של הבעיה והפתרון בעולם האמתי.

מחזור המודל (לנסח, ליישם, לפרש ולהעריך) הוא היבט מרכזי בתפיסה שאנחנו מציגים. עם זאת, לעיתים קרובות אין צורך לעסוק בכל שלב של מחזור המודל, במיוחד בהקשר של פירוש והערכה. לרוב, משתמש הקצה מבצע כמה מהצעדים של המחזור, אך לא את כולם. לדוגמה, במקרים מסוימים שאלון פיז"ה יביא בפני התלמידים ייצוגים מתמטיים, כמו גרפים או משוואות, שאפשר לתפעל ישירות על מנת לענות על שאלה. במקרים אחרים התלמידים עשויים להשתמש בהדמיית (סימולציה) מחשב כדי לחקור את ההשפעה של שינוי משתנה במערכת או בסביבה.

הפעלים 'לנסח', 'ליישם' ו'לפרש' מייצגים שלושה תהליכים שבהם התלמידים לוקחים חלק פעיל בפתרון בעיות. הם מנסחים מצבים בצורה מתמטית שמיושמת בהם חשיבה מתמטית (אינדוקטיבית ודדוקטיבית) בזיהוי הזדמנויות ליישם ולהשתמש במתמטיקה. זה כולל יכולת להיות מסוגל לגשת למצב שהוצג ולהפוך אותו לפתיר באופן מתמטי, לאפשר הצגה של מבנה מתמטי, זיהוי משתנים ופישוט הנחות כדי לפתור ולהתמודד עם האתגר.

העיסוק במתמטיקה כרוך ביישום של חשיבה מתמטית תוך שימוש במושגים, פרוצדורות, עובדות וכלים מתמטיים כדי לגזור פתרון מתמטי. זה כולל ביצוע חישובים, מניפולציה של ביטויים ומשוואות אלגבריות או מודלים מתמטיים אחרים, ניתוח מידע באופן מתמטי מתרשימים ותרשימים מתמטיים, פיתוח תיאורים והסברים מתמטיים ושימוש בכלים מתמטיים לפתרון בעיות.

פירוש המתמטיקה כרוך בהרהור על פתרונות או תוצאות מתמטיות ופרשנותם בהקשר של בעיה או אתגר. זה כרוך ביישום של חשיבה מתמטית לצורך הערכת פתרונות מתמטיים ביחס להקשר של הבעיה וקביעה האם התוצאות סבירות והגיוניות במצב מסוים.

אנו מבקשים להסביר מדוע במועד 2021 תיכלל גם החשיבה החישובית כחלק ממבחן המתמטיקה. הכוונה היא להתמקד בנקודת המפגש שבין חשיבה מתמטית לחשיבה חישובית. מעבר למסר שיועבר על כך שהעולם הופך טכנולוגי יותר ויותר, מדובר במרכיבים חיוניים ביישומי המתמטיקה הנחוצים לצורך פתרון בעיות מתמטיות. למשל, הפשטה, חשיבה אלגוריתמית, אוטומציה, פירוק והכללה.

המאפיינים הייחודיים של חשיבה חישובית בדרך שהיא באה לידי ביטוי בתחום המתמטיקה, מתמקדים בדרך שבה ידע מתמטי מתממש על ידי תכנות של אלגוריתמים וסימולציות, ומאפשר לתלמידים להמחיש יישום דינמי של מושגים ויחסים מתמטיים. כלומר, התלמידים יעבדו עם בסיסי נתונים וינתחו אותם באמצעות מודלים מתמטיים ממוחשבים.

הקשרי המשימות המתמטיות והתוכן שלהן

המשימות המתמטיות תהיינה נטועות בתוך העולם האמתי. התפיסה שמובילה את ההחלטה הזו נעוצה בכך שאזרחי המאה ה-21 הם צרכנים של נתונים כמותיים וסטטיסטיים. ארבע הקטגוריות שנבחרו לייצג הקשרי מציאות הן: אישיות, תעסוקתיות, חברתיות ומדעיות. אלו תחומים המשקפים מכוון רחב של סיטואציות חיים שמולן אנשים עשויים להתמודד.

מדובר במצבים אמתיים שמזמנים צורך להתמודד עם אתגר, או בעיה שצריך לפתור. הדרך לפתור את הבעיה אינה אינטואיטיבית, אלא דורשת לפנות למודל מתמטי ולפתור אותו באמצעות ידע וכלים מתמטיים שנלמדו בבית הספר. בדרך הזו מועבר גם מסר לגבי התפקיד שהמתמטיקה ממלאת בעולם, ואת החיוניות שלה כדי לתפקד היטב בזירות החיים השונות.

התוכן של המשימות יאפשר להעריך אותן באמצעות שלוש זוויות מבט: תהליכי החשיבה המתמטית, הידע והמיומנות המתמטיים, וכישורי המאה ה-21:

א. תהליכי חשיבה מתמטית

אנו מכוונים אל תהליכי חשיבה דדוקטיביים ואינדוקטיביים, המשלבים הערכת מצבים, בחירת אסטרטגיות, מתן הסבר הגיוני לאופן הסקת המסקנות, תיאור מדורג של תהליך הפתרון, והבנה כיצד הפתרון יכול להיות מיושם. תלמידים חושבים באופן מתמטי כשהם מזהים את המודל המתמטי בתוך הבעיה, מארגנים, מחברים ומציגים אותו. אחר כך הם בונים את הפתרון, משערים, מעריכים, משליכים, מנמקים, מסבירים, מגנים על הטיעון שלהם, מפרשים אותו, מקבלים החלטות, מבקרים את הפתרונות האלטרנטיביים ובמידת הצורך, מפריכים אותם.

היכולת להסביר באופן הגיוני ולהציג טיעונים בצורה כנה ומשכנעת, זו מיומנות שהפכה חשובה מאוד בעולם של היום. מתמטיקה הוא מדע של אובייקטים ומושגים מוגדרים היטב שניתן לנתח בדרכים שונות, תוך שימוש ב-'הנמקה מתמטית', כדי להסיק מסקנות לגביהן אנו בטוחים. באמצעות מתמטיקה התלמידים לומדים שבעזרת הנמקה מתאימה הם יכולים להגיע לתוצאות ולמסקנות עליהן ניתן לסמוך בוודאות. יתר על כן, מסקנות אלה הן הגיוניות ואובייקטיביות, ומכאן שהן נטולות פניות, ללא צורך באימות מצד רשות חיצונית.

בבית הספר לומדים נושאים שעליהם אפשר לבנות מיומנות של הנמקה מתמטית. למשל, הבנה כמותית של מערכות מספריות ואלגבריות, הערכת כוח ההפשטה והייצוג הסימבולי, ראיית מבנים מתמטיים והבנת הסדר שלהם, הכרה בקשרים פונקציונליים בין כמויות, וזיהוי כיצד ניתן להשתמש במודלים מתמטיים, תוך נגיעה באתגרים שמציב העולם האמתי שמחוץ לכיתת הלימוד.

אנו מבקשים להדגיש שני ממדים חשובים של חשיבה מתמטית בעולמנו היום. האחד, הוא ההנמקה הדדוקטיבית, כלומר פתרון לבעיה ספציפית שנובע מהישענות על הנחות ברורות, על כללים שכבר הוכחו ועל אקסיומות. זה סוג המתמטיקה שעליו שמים דגש כיום בתכניות הלימודים במרבית מדינות העולם. אבל הממד השני, החשוב לא פחות, הוא ההנמקה האינדוקטיבית. זו הדרך להסיק מסקנות ולהגיע לפתרונות, תוך הישענות על ניסיון מצטבר מהמציאות, בעיקר באמצעות כלים סטטיסטיים והסתברותיים.

ההנמקה האינדוקטיבית היא זו שמאפיינת את עולמנו, והיא המתמטיקה המעשית שאליה אנו חותרים. והיא באה לידי ביטוי במאגרי נתונים גדולים, שצריך למצוא בתוכם קשרים ותופעות בכלים מתמטיים. זה אתגר גדול, כי במוחם של אנשים ישנו בלבול תדיר בין מה שאפשרי לעומת מה שסביר ועליהם לקבל החלטות בתנאים של חוסר וודאות. הבלבול הזה גורם לאנשים רבים ליפול טרף לתיאוריות של קונספירציה ולחדשות מזויפות.

ב. הידע והמיומנות המתמטיים

1. כמות ומספר

המושג של 'כמות' הוא נקודת המפגש הבסיסית ביותר בין המתמטיקה למציאות. הוא מתחיל ביכולת להשוות בין קבוצות של עצמים, לסווג, לספור, למדוד, לעגל ולהעריך. לשם כך צריך להבין את מערכות המספרים ואת תכונותיהן האלגבריות. צריך להבין כיצד הן מאפשרות לפתור משוואות ברמת מורכבות מתגברת. תהליך לימודי זה מניח את התשתית שיוצרת הזדמנות לתלמידים לראות דוגמאות כיצד מתמטיקה באה לידי ביטוי בעולם האמיתי.

אבל, כדי להשתמש בכמות באופן יעיל, צריך להיות מסוגלים ליישם לא רק מספרים, אלא גם מערכות מתמטיות. הרי למספרים עצמם יש רלוונטיות מוגבלת ומה שהופך אותם לכלי רב עוצמה אלו הפעולות שאנחנו יכולים לבצע איתם. לשם כך חשוב להבין את הסמלים המתמטיים שבהם משתמשים לצד המספרים (כמו π) וכיצד להשתמש בהם. זו כבר מיומנות מתמטית ברמה הולכת ומתגברת, תוך שימוש בעקרונות אלגבריים, חיפוש פתרונות יעילים ומעבר בין ייצוגים.

בבית הספר היסודי הילדים לומדים את מרכזיות המספר, והבסיס הזה מוביל אותם לתפוס את התכונות האלגבריות, שבתחילה נחוות על ידם דרך שימוש במספרים. בחטיבת הביניים הם עולים מדרגה ובונים על כך את היכולת לפתור משוואות, להגדיר מודלים, ליצור פונקציות גרף, ולתכנת אלגוריתם שנשען על מאגר גיליון נתונים אלקטרוני. ברמות הגבוהות ביותר הם מזהים דפוסים מתמטיים ונותנים להם פרשנות.

2. ייצוג והפשטה

צריך להבין מה עומד מאחורי כל זה מבחינת האנושות. הרי הפנייה אל הרעיונות הבסיסיים הללו של המתמטיקה נבעה מן ההתנסות של בני אדם בעולם. ההתנסות הזו הניעה צורך עמוק ליצור סדר

ובהירות, ולהיות מסוגלים לנבא התרחשויות לאור ניסיון העבר. האובייקטים המתמטיים נוצרו על ידי האדם כדי להדגים ולייצג את המציאות, ולכל הפחות כדי לשקף היבטים של המציאות. המעבר לייצוג סמלי אפשר לבצע הפשטה והכללה, להבין את היחסים במציאות ולהתנהל בתוכה בתבונה.

כאשר עוברים אל המתמטיקה הנלמדת בבית הספר, ההפשטה מאפשרת לתלמידים לבנות מערכות יחסים בין אובייקטים. למשל, כדי להתחיל להבין את המושג 'מעגל', התלמידים מתנסים באובייקטים שונים שהם מעריכים שהם 'עגולים'. הם מפתחים תחושה, מתוך הדמיון וההבדל בין האובייקטים, לגבי מהו מעגל. אבל רק כשהם מתחילים להשתמש במעגל באופן פורמלי, לאחר שהוגדר כמקום של נקודות במרחק שווה מנקודה קבועה במישור דו מידי, אז ההפשטה הופכת מועילה.

התלמידים משתמשים בייצוגים - בין מבוססי טקסט, סמלים, גרפים, מספרים, גיאומטריים או בקוד תכנות - כדי לארגן ולתקשר את חשיבתם המתמטית. הייצוגים מאפשרים לנו להציג רעיונות מתמטיים בצורה תמציתית, אשר בתורם מובילים לאלגוריתמים יעילים. ייצוגים הם גם מרכיב ליבה של הדמיה (סימולציה) מתמטית, ומאפשרים לתלמידים לבצע ניסוח מופשט או אידיאלי של בעיה בעולם האמיתי. מבנים כאלה חשובים גם לפרשנות ולהגדרת התנהגותם של אמצעי חישוב.

3. מבנים

כשתלמידים בבית ספר יסודי רואים: $5 + (3 + 8)$ הם נחלקים לשלושה סוגים. יש הרואים מחרוזת סמלים המצביעים על חישוב שיש לבצע בסדר מסוים לפי כללי סדר הפעולות. אחרים רואים מספר שנוסף לסכום של שני מספרים אחרים. הקבוצה האחרונה רואה מבנה, ובגלל זה לא צריך לספר להם על סדר הפעולה, כי הם יודעים שאם אתה רוצה להוסיף מספר לסכום, תחילה עליך לחשב את הסכום.

ככל שתלמידים עולים לכיתות גבוהות יותר, זיהוי מבנים הופך להיות מאוד חשוב. כשתלמיד מזהה את הצורה הבאה: $F(x) = 5 + (x-3)^2$ שזה כמו להגיד ש $F(x)$ הוא הסכום של 5 וריבוע שהוא אפס כאשר $x = 3$ ומבין שמינימום f הוא 5. זה מה שמניח את הבסיס לחשיבה פונקציונלית. המבנה הוא זה שמעניק עוצמה לייצוג הסמלי.

מבנה קשור באופן ישיר לייצוג סמלי. השימוש בסמלים הוא רב עוצמה, אך רק אם הם שומרים על משמעות עבור המסמל, במקום להפוך לאובייקטים חסרי משמעות שיש לסדר אותם מחדש על דף. ראיית מבנה היא דרך למצוא ולזכור את המשמעות של ייצוג מופשט. מבנים כאלה חשובים גם לפרשנות ולהגדרת התנהגותם של אמצעי חישוב. היכולת לראות מבנה היא עזרה רעיונית חשובה לידע תהליכי.

הדוגמאות לעיל ממחישות כיצד ראיית מבנה באובייקטים מתמטיים מופשטים היא דרך להחליף כללי ניתוח, אותם ניתן לבצע על ידי מחשב, בתמונות רעיוניות של אותם אובייקטים שמבהירים את

תכונותיהם. כאשר אובייקט מוחזק בתודעה של תלמיד בצורה כזו, הוא נתון לנימוקים ברמה שהיא הרבה יותר גבוהה מאשר מניפולציה סמלית פשוטה.

4. הדגמה

כשיש לתלמיד תפיסה חזקה של המבנה המתמטי, אז היא גם יכולה לתמוך גם בהדגמה. כאשר מדובר בנושאים מהעולם האמיתי, המבנה המתמטי יכול להיות זה שמנחה את ההדגמה. תלמידים אמורים לדעת להשליך את החשיבה הזו על נושאים לא מתמטיים על מנת להשתמש בהיגיון מתמטי.

צורה לא רגילה יכולה להיות מוערכת על ידי צורות פשוטות יותר ששטחן ידוע. תבנית גאומטרית יכולה להיות מובנת על ידי השערה של השתקפות סימטרית, סיבובית ומרחבית. ניתוח סטטיסטי הוא בדרך כלל נושא של שימוש במבנה מסוים על מערך נתונים, למשל על ידי הנחה שההתפלגות היא נורמלית או שמשתנה אחד הוא פונקציה לינארית של אחר, ונמדד בהתחשב בטעות התקן.

5. יחסים

תלמידים בבתי ספר יסודיים נתקלים בבעיות שבהם הם צריכים לחשב תוצאה מספרית מסוימת. לדוגמה, מהי המהירות המדויקת שצריך לנסוע בין טקסון לפניקס, מרחק של 180 קילומטר, בזמן של שעה וארבעים דקות? לבעיות מסוג זה קיימת תשובה ספציפית. על מנת לנסוע 180 קילומטר בשעה וארבעים, הנהג ייסע במהירות של 108 ק"מ לשעה.

בנקודה מסוימת תלמידים יתחילו לחשוב על סיטואציות מסוימות כאשר כמויות הן משתנים הנעים על טווח של ערכים. לדוגמה, מהו היחס בין המרחק הנדרש לנסיעה בקילומטרים, זמן הנסיעה בשעות, אם אנחנו נוסעים במהירות קבועה של 108 קמ"ש? שאלו כאלה מציגות יחסים פונקציונליים במקרה זה יחסים מסוג זה יוצגו על ידי הנוסחה מרחק נסיעה (ג) = $108 * z$, זוהי הפרופורציה, דוגמה בסיסית ואולי החשובה ביותר לידע כללי.

יחסים בין כמויות יכולים להיות מבוטאים באמצעות משוואות, גרפים, טבלאות, או באמצעות תיאורים מילוליים. צעד חשוב בלמידה הוא לחלץ מתוך אלה את הרעיון של הפונקציה עצמה, כאובייקט מופשט של המושגים האלה. המרכיבים החיוניים של מושג זה הם לדעת לסווג את הנושאים ואז להשתמש בכלים המתאימים על מנת לפתור את הבעיה.

6. מודלים

מודלים מייצגים תפיסה מחשבתית. מודלים של פישוט המציאות, לבסס תכונות מסוימות של תופעה תוך קירוב או התעלמות מתכונות אחרות. מודל יכול להדגים המשגה, אך מובן שמדובר בקירוב או בהשערת עבודה הנוגעת לתופעת האובייקט, או שזה יכול להיות פישוט מכוון.

מודלים מתמטיים מנוסחים בשפה מתמטית ומשתמשים במגוון כלים ותוצאות (לדוגמה, אריתמטיקה, אלגברה, גאומטריה וכו'). ככאלה, הם משמשים ככלים להגדרה מדויקת של המשגה

של הגדרה מדויקת או של תיאוריה או תופעה, לניתוח מידע והערכה (האם המודל מתאים למידע?), ולביצוע תחזיות.

מודל נוצר כדי לרוץ לאורך זמן עם שינויים מזדמנים, וכך לייצר סימולציה. כאשר הדבר הזה נעשה, ניתן לבצע תחזיות, ללמוד תוצאות ולהעריך את רמת הדיוק של המודלים. לאורך תהליך הכרת המודל, צריכים לקחת בחשבון פרמטרים מהעולם האמיתי שמשפיעים על המודל ועל הפתרונות שהוא מייצר. מודלים מבוססי מחשב, מספקים את היכולת לבחון השערות, לייצר ידע, להכיר אקראיות וכו'.

7. שונות

בסטטיסטיקה, חישוב השונות הוא הדרך המרכזית להגדיר משתנה ולהחליט לאיזו מחלקה הוא משתייך. בעולמנו, אנשים לעתים מתעלמים מהשונות ומכאן מגיעים להכללות שבדרך כלל יהיו מטעות או שגויות וכתוצאה מכך מסוכנות מאד. הטיה זו נוצרת בעקבות אי לקיחה בחשבון של מקורות עוצמת השונות.

סטטיסטיקה היא למעשה חישוב וייצור מודלים המבוססים של חישוב השונות. מודלים אלו בונים את הסביבה ההסתברותית שמאפשרת הבנה של תופעות או ביצוע החלטות קריטיות. סטטיסטיקה במקרים רבים נמצאת בחיפוש אחר תבניות בעלות הקשרים משתנים רחבים, כדי לנסות למצוא את הקשר כדי למצוא את "האמת" – המוגדרת בציטוטים שונים לא בצורה המתמטית שלה אלא ככזו שיכולה להיות מועברת על ידי הקשרים הסתברותיים וחישוב טעות התקן.

בסופו של דבר, מקבל ההחלטות נותר עם הדילמה שלעולם לא יידע בוודאות מהי האמת. האומדן שפותח הוא, במקרה הטוב, טווח של ערכים אפשריים - ככל שהתהליך טוב יותר, למשל, ככל שמדגם הנתונים גדול יותר, כך צמצם את טווח הערכים האפשריים, אם כי לא ניתן להימנע מטווח. לאור החשיבות הרבה של נושא זה, יהיה לו משקל רב בפיז"ה 2021.

מימוניות המאה ה-21

[לא מפרטים בנושא זה, מסתפקים בהפניה לעבודה, בהתהוות, של קבוצת 'חינוך 2030' של ה-

[OECD

התהליכים המתמטיים

משימות המתמטיקה בפיז"ה 2021 יוקדשו לחשיבה מתמטית, או לאחד משלושה תהליכים מתמטיים: ניסוח הסיטואציה באופן מתמטי; יישום נושאים מתמטיים, עובדות, נהלים והבנה מתמטית; פירוש, יישום והערכת תוצאות.

בתוך כך, נשים דגש על שלושה השלבים: הניסוח שמראה עד כמה תלמיד מסוגל להכיר ולזהות הזדמנויות כדי להשתמש במתמטיקה בפתרון בעיות, היישום שימחיש כיצד תלמיד יכול לבצע

חישובים ומניפולציות וליישם את הנושאים והעובדות בפתרון מתמטי לבעיה שנוסחה באופן מתמטי. הפרוש לאופן שבו תלמיד מעריך את יעילות הפתרון המתמטי שלו למול האתגר שהוצב בפניו העולם האמתי.

1. ניסוח

המילה 'ניסוח' בהגדרת אוריינות מתמטית מתייחס ליכולת של תלמיד להכיר ולזהות הזדמנויות כדי להשתמש במתמטיקה ולספק מבנה מתמטי לבעיה המוצגת בהקשר מסוים. בתהליך של ניסוח מצבים באופן מתמטי, התלמידים יקבעו האם יכולים לפשט את הנתונים המתמטיים החיוניים כדי לנתח, להשתמש ולפתור את הבעיה. התלמידים לוקחים מצבים מבעיות מציאותיות ומשייכים את המבנה המתמטי המתאים, בעזרת ייצוג מתאים.

תהליך זה של ניסוח מצבים מתמטיים כולל את הפעילויות הבאות:

- בחירת מודל פתרון מתאים (מהרשימה שנלמדה).
- זיהוי היבטים של הבעיה הניצבת בהקשר של העולם האמתי וזיהוי משתנים משמעותיים.
- הכרה של מבנה מתמטי (כולל סדר פעולות, יחסי גומלין ותבניות) בבעיות ובסיטואציות מסוימות.
- פישוט סיטואציה או בעיה באופן שיהיה אפשרי לניתוח מתמטי (לדוגמא על ידי פירוק לגורמים).
- זיהוי אילוצים והנחות מאחורי כל מודל מתמטי, תוך פישוט וליקוט מההקשר.
- הצגת הסיטואציה באופן מתמטי; שימוש במשתנה מתאים, סמלים, דיאגרמות, ומודלים סטנדרטיים.
- הצגת בעיה בצורה שונה, כולל ארגון לפי נושאים מתמטיים והנחות מתאימות.
- הבנה והדגמת יחסי הגומלין בין הקשרים ספציפיים, תוך שימוש בשפה פורמלית והדרך להציג אותה באופן מתמטי.
- תרגום הבעיה ל"שפה מתמטית" או לאופן הצגתה.
- בחירה מתוך מערך כלי החישוב את זה שהכי יעיל ליישם כדי לשרטט מערכת יחסים שטמונה בהקשרים של פתרון בעיות מתמטיות.
- ייצור סדרת הוראות (צעד אחר צעד) כדי לפתור בעיות.

2. יישום

המילה 'יישום' בהגדרת האוריינות המתמטית מתייחסת ליכולת של תלמיד ליישם מושגים מתמטיים, עובדות, פרוצדורות והנמקה כדי לפתור בעיות מנוסחות מתמטית וכדי להשיג מסקנות מתמטיות. בתהליך זה, תלמידים מבצעים את ההליכים המתמטיים הדרושים בכדי להפיק תוצאות ולמצוא פתרון מתמטי. למשל, ביצוע חישובים אריתמטיים, פתרון משוואות, ביצוע ניכויים לוגיים

מהנחות מתמטיות, חילוץ מידע מתמטי מטבלאות ותרשימים וייצוג ותמרון של צורות במרחב וניתוח נתונים.

בשלב זה התלמידים עובדים על מודל של המצב, ובמסגרתו עם קובעים סדירות, מזהים קשרים בין ישויות מתמטיות ויוצרים טיעונים מתמטיים. תהליך זה כולל פעילויות כמו:

- ביצוע חישוב פשוט.
- להגיע למסקנה פשוטה.
- בחירת אסטרטגיה מתאימה מרשימה מסוימת.
- למצוא וליישם אסטרטגיות למציאת פתרונות מתמטיים.
- שימוש בכלים מתמטיים, כולל בטכנולוגיה, כדי לעזור למצוא פתרונות מדויקים או מקורבים.
- יישום עובדות מתמטיות, חוקים, אלגוריתמים ומבנים כאשר מוצאים פתרונות.
- לבצע מניפולציות על מספרים, מידע וידע, ביטויים אלגבריים ומשוואות וצורות גיאומטריות.
- ביצוע דיאגרמות מתמטיות, גרפים, סימולציות ופישוט מבנים מתמטיים.
- שימוש והחלפה בין צורות הצגה שונות בתהליך מציאת הפתרון.
- ביצוע הכללות והקשרים מבוססים על תוצאות באמצעות מתמטיקה יישומית.
- מחשבה על טיעונים מתמטיים, הסבר והצדקה של תוצאות.
- הערכת המשמעות של התבניות וסדר הפעולות שנצפו (או מוצעים) בנתונים.

3. פירוש

המילה 'פירוש' (והערכה) בהגדרת אוריינות מתמטית מתרכזת ביכולתם של אנשים לחשוב על פתרון מתמטי, תוצאות או מסקנות ולפרשן בהקשר של הבעיות בעולם האמיתי שהניעו את התהליך. התהליך מערב תרגום של פתרונות מתמטיים, בנייה והסבר של טיעונים בהקשר של הבעיה, תוך כדי שיקוף מודל התהליך המתמטי ותוצאותיו. תהליך זה כולל פעילויות, כגון:

- פירוש המידע המוצג באופן גרפי או בדיאגרמות.
- הערכה של תוצאות מתמטיות תלויות הקשר.
- ייצור פתרון מתמטי תלוי הקשר בעולם האמיתי.
- הערכת הרציונל של פתרונות מתמטיים בהקשר של בעיות בעולם האמיתי.
- הבנה איך פתרון בעולם האמיתי משפיע על תוצאות וחישובים מתמטיים.
- הבהרת התוצאה המתמטית, האם מסקנה הגיונית או לא, בהתחשב בבעיה ובהקשרה.
- הבנת ההיקף והגבולות של השלכותיו של הפתרון המתמטי.
- ביקורת חיה של גבולות אשר שימשו כדי לפתור בעיות מתמטיות, ובחשיבה מתמטית וחישובית כדי לבצע תחזיות, כדי לספק הוכחות לטיעונים וכדי לבחון ולהשוות פתרונות.

הידע המתמטי והתוכן המתמטי

כדי לפתור בעיות משמעותיות בעלות הקשר לאזרחי העולם המודרני, יש צורך בידע מתמטי ובהבנה מתמטית. אין דרך קיצור לחשיבה מתמטית וליכולת ליישם את המתמטיקה, מבלי להישען על ידע מתמטי. תחומי הידע והתוכן המתמטיים שיכללו בפיז"ה 2021 הם אותם תחומים שמלווים אותנו במחזורי פיז"ה מאז 2012: שינוי ויחסי גומלין; צורה וחלל (נפח); כמות; וחוסר וודאות.

אלו נושאים מתמטיים שנלמדים כמעט בכל המדינות, הם כוללים את גרעין החומר המתמטי הנלמד, דרכם ניתן לארגן את היישום המתמטי באופן שמבטיח מגוון נושאים רחב, עיסוק בתופעות מתמטיות חשובות, ומעבר בין המתמטיקה ובין בעיות המבוססות על מצבים אמתיים.

חשוב לשים לב שתכניות הלימודים בבתי הספר מאורגנות בדרך כלל סביב נושאי תוכן, כמו: מספרים, אלגברה, פונקציות, גאומטריה. כאשר תכניות לימודים מאורגנות בצורה כזו, אין ספק שקל למשרדי החינוך להגדיר ציפיות, ולנהל ולפקח על בתי ספר, כי מדובר ברשימות של חומרי לימוד שאפשר לוודא אם כיסו אותן או לא.

ביצענו ניתוח מעמיק של תכניות הלימודים הנהוגות ב-11 מדינות. זיהינו את הגרעין המשותף לכולן ולקחנו אותו כבסיס התוכן המתאים למבחני פיז"ה. בפרק זה נתאר את הנושאים הללו, שהם אלו שמשמשים אותנו לצורך בניית משימות פיז"ה, ועל גבן נבנה את מרחב היישום בתוך הקשרי המציאות השונים.

עם זאת, במחזור 2021 של פיז"ה, זיהינו סוגיות מתמטיות שעליהן נשים דגש מיוחד. הן אינן נושאים חדשים, אלא דגשים חשובים בתוך הנושאים הקיימים:

1. שינוי ויחסי גומלין: תופעת הצמיחה (growth).
2. צורה, חלל (נפח): קירוב (approximation) גאומטרי.
3. כמות: סימולציות ממחושבות.
4. חוסר וודאות: יכולת קבלת החלטות.

1. שינוי ויחסי גומלין

כמו בטבע, גם במערכת החינוך, מרכיבים שונים משפיעים האחד על השני. שינויים אלו מתרחשים לאורך זמן, לעיתים ארוך ולעיתים קצר. כמה ממערכות היחסים הן קבועות וחלקן זמניות, לטבע יש יכולת סתגלנות גבוהה, הוא סובלני יותר כלפי שינויים. כדי לתאר את השינויים הללו, נדרשת הבנה בסיסית של משוואות מתמטיות, גרפים, דיאגרמות, ועוד.

אפשר להבחין בשינויים שכאלו בהקשרי מציאות מגוונים, כמו גידול אורגניזמים, מוסיקה, מחזור עונות השנה, תבניות מזג אוויר, תנאי תעסוקה ורמה כלכלית. פונקציות וביטויים אלגבריים, משוואות, טבלאות והצגות גרפיות, כל אלו הם אמצעים לתיאור והסבר שכאלו. כך ניתן לחשב, להדגים, ולהבין את תהליך השינוי במערכת היחסים.

לדוגמא, הבנת המושג צמיחה (growth). זה מושג שהבנתו חיונית כדי לתפוס את הסכנות של מחלת השפעת והתפשטות החיידקים, כמו גם את האיום הטמון בשינוי האקלים. הבנה זו כרוכה בהבנה של מערכות לא לינאריות, בדרך כלל אקספוננציאליות. פשוט וקל להבין מערכות לינאריות, אבל חשוב לזכור שלא ניתן להסיק שתמיד מתקיימת מערכת יחסים לינארית.

דוגמא טובה ללינאריות היא הנחה שכולם נסעו את אותו מרחק בהפרשי זמן שונים ובמהירות מסוימת. יישום מסוג זה מספק הערכה הגיונית כאשר המהירות נשארת יחסית קבועה. אבל, משקפיים לינאריות למול תופעת מגיפה מסוג שפעת לדוגמא, יצמצמו בצורה גסה את מספר האנשים החולים בחמישה ימים לאחר התפרצות המגיפה.

כאן, התלמידים יצטרכו להפגין הבנה בסיסית של תופעות לא לינאריות (כולל תופעות בעלות משוואה ריבועית ואקספוננציאליות) והבנה של מהירות התפשטות זיהומים בהתחשב בכך ששיעור השינוי עולה מיום ליום הוא קריטי. התפשטות זיהום היא דוגמא חשובה לצמיחה מעריכית. ההכרה בה ככזו תעזור לאנשי רפואה להבין את האיום המובנה ואת הצורך בפעולה מהירה.

בתוך כך, תלמידים יצטרכו לזהות שלא כל צמיחה היא בהכרח לינארית; שלצמיחה לא לינארית קיימים מאפיינים והשלכות; להעריך באופן אינטואיטיבי את המושג 'צמיחה אקספוננציאלית' בקצב מהיר, לדוגמא בסולם ריכטר, המודד רעידות אדמה ושמעבר מיחידה אחת לאחרת בסולם היא לא עלייה של דרגה 1 מבחינת עוצמה אלא פי 10, ו-1000 פעמים בין הרמות השונות, וכו'.

2. צורה, חלל ונפח

צורה, חלל ונפח הוא תחום המקיף מגוון רחב של תופעות בעולם החזותי והפיזי שלנו: דפוסים, תכונות של אובייקטים, עמדות וכיוונים, ייצוגים של אובייקטים, פענוח וקידוד של מידע חזותי, ניווט ואינטראקציה דינאמית עם צורות אמתיות, תנועה, תזוזה ויכולת לצפות מראש פעולות במרחב.

הגיאומטריה משמשת בסיס חיוני למרחב וצורה, אך הקטגוריה משתרעת מעבר לגאומטריה מסורתית בתוכן, משמעות ושיטה, תוך שהיא מתבססת על אלמנטים מתחומים מתמטיים אחרים כמו הדמיה מרחבית, מדידה ואלגברה.

לדוגמא, צורות יכולות להשתנות לאור המיקום שלנו, ובכך לדרוש מושגי פונקציה. נוסחאות מדידה הן מרכזיות בתחום זה. קטגוריית תוכן זו כוללת זיהוי, מניפולציה ופרשנות של צורות, כולל שימוש בכלים, החל מתוכנת גיאומטריה דינמית ועד מערכות GPS ותוכנות ללמידה מכונה.

כדי שתלמיד יהיה מסוגל להגיע לרמות חשיבה ויישום גבוהות בתחום זה, הוא יזדקק לידע מתמטי מוצק. כמו כן, הוא יצטרך להיות מסוגל להשתמש בידע הזה בהקשרים מגוונים, כמו הבנת פרספקטיבות בציור, יצירה וקריאה של מפות, הפיכת צורות בעזרת טכנולוגיה, פירוש של תמונות תלת ממדיות בפרספקטיבות שונות, ועוד.

הסוגיה שעליה נשים דגש בפיז"ה 20201 היא קירוב גאומטרי. העולם כיום עמוס בצורות שלא עוקבות אחר תבניות או סימטריה מסוימת. מכיוון שנוסחאות פשוטות הן מטבען מכלילות, לא ניתן באמצעותן להבחין בחריגות מהכלל. ואז, קשה לנו להבין את מה שאנו רואים ולמצוא את השטח או הנפח של המבנים המתקבלים.

לדוגמא, מציאת כמות השטחים הנדרשת בבניין בו הדירות בנויות עם זוויות חדות, בשילוב של קימורים צרים. זו סיטואציה שדורשת גישה שונה מזו שהייתה במקרה של חדר מלבני, כפי שבדרך כלל מוצג במשימות בספרי הלימוד בבתי הספר.

3. כמות

רעיון הכמות הוא ההיבט המתמטי החיוני ביותר בעולמנו. הכוונה היא לכימות התכונות של אובייקטים, מערכות יחסים, מצבים וישויות בעולם והבנת הייצוגים השונים של כימותים אלה. עיסוק בכימות העולם כרוך בהבנת מדידות, ספירות, גודל, יחידות, אינדיקטורים, גודל יחסי ומגמות ודפוסים מספריים.

הכימות היא שיטה ראשונית לתיאור ולמדידה של מערך תכונות. כך גם ניתן לבצע הדמיה של מצבים, לבחון שינויים ויחסים, לתאר ולבצע מניפולציה של מרחב וצורה, לארגן ולפרש נתונים ולמדוד ולהעריך בתנאים של חוסר ודאות. היבטים של הנמקה כמותית, כמו חוש המספרים, ייצוגים מרובים של מספרים, אלגנטיות בחישוב, חישוב מנטלי, והערכת סבירות התוצאות, אלו הם תמצית האוריינות המתמטית ביחס לכמות.

הסוגיה שעליה נשים דגש בפיז"ה 20201 היא השימוש בהדמיות ממוחשבות. הן במתמטיקה והן בסטטיסטיקה יש בעיות שדורשות מתמטיקה מורכבת, המערכת מספר רב של גורמים הפועלים באותה מערכת. לעתים, עולות סוגיות אתיות הנוגעות ליכולת לבדוק את הפתרון, כי הוא כרוך בהשפעה על יצורים חיים או על הסביבה.

לכן, בעולם של ימינו ניגשים לבעיות כאלה באמצעות הדמיות ממוחשבות המונעות על ידי אלגוריתמים. בדוגמא הממחישה סימולציה של תכנית חיסכון, התלמיד משתמש בהדמיית מחשב ככלי בקבלת החלטות. הדמיית המחשב עושה את החישובים עבור התלמיד, ומשאירה את התלמיד לתכנן, לחזות ולפתור בעיות על סמך המשתנים שהוא יכול לשלוט עליהם.

4. חוסר וודאות

חוסר וודאות הוא מצב שצריך ללמוד לחיות אתו. מדובר בתופעה הנמצאת בליבה של תיאוריית ההסתברות ובסטטיסטיקה. חוסר וודאות ומחסור בנתונים בתחום תוכן מסוים, מעידים על מצב העניינים האמתי בעולם. בעולם האמתי חסרים נתונים, יש נתונים מיותרים, שהם לעתים שגויים, כי אז דרכו של עולם.

סקרים, תחזיות כלכליות וחיזוי מזג אוויר כולם נשענים על מודלים סטטיסטיים ומדידות בתנאים של חוסר וודאות. בסיס הידע שמשמש את יצירת המודלים הללו נטוע בתחומי הלימוד המסורתיים של הסתברות וסטטיסטיקה. באמצעותם ניתן לתאר, לבצע הדמיות, ולפרש את התופעות.

הסוגיה שעליה נציב זרקור בפיז"ה 2021 היא קבלת החלטות. הסטטיסטיקה מספקת מדד שמציג את השונות שבה נשים נתקלים בחיי היומיום שלהם. כאשר יש יותר ממשנתנה אחד, מתקיימת שונות בכל אחד מהמשתנים. לעיתים קרובות ניתן לייצג יחסים אלה בטבלאות דו-כיווניות המספקות את הבסיס לקבלת החלטות.

בטבלה דו כיוונית לשני משתנים דיכוטומיים (כלומר שני משתנים עם שתי אפשרויות כל אחד), ישנם ארבעה שילובים. הטבלה הדו-כיוונית (ניתוח המצב) מספקת שלושה סוגים של אחוזים המספקים הערכות של ההסתברויות המתאימות. אלה כוללים את ההסתברויות של ארבעת האירועים המשותפים, שני השוליים, וההסתברויות המותנות הממלאות את התפקיד המרכזי במה שקראנו קבלת החלטות מותנית.

בדוגמה שאנו מציגים לגבי רכישת אחזניות באתר קניות מקוון, התלמיד מקבל תצוגת דירוג צרכני של האחזניות מלקוחות קודמים שרכזו אותן באותה חנות מקוונת. בנוסף, התלמיד מקבל ניתוח מפורט יותר של הביקורות של הלקוחות שסיפקו דירוגים נמוכים. כך שנוצרת טבלה דו כיוונית והתלמיד נדרש להפגין הבנה באומדני ההסתברות השונים שהטבלה הדו כיוונית מספקת.

חשוב לשים לב, שזיהוי קבלת החלטות מותנית כמוקד של חוסר ודאות, משמעו שמה שמצופה מהתלמידים הוא כיצד ניסוח ניתוח המודל משפיע על המסקנות שלהם, ולהבחין כיצד השערות וקשרים שונים יכולים להביא למסקנות שונות.

הנחיות למפתחי משימות וכלי הערכה

משימות פיז"ה נשענות על המתמטיקה שתלמידים בני 15 כבר למדו בבתי ספר, אך הן אינן בודקות בקיאות בידע המתמטי, אלא את אופן השימוש במתמטיקה והחשיבה המתמטית. ערכנו ניתוח של תוצאות הלמידה הרצויות במדינות ברחבי העולם ולמדנו כיצד הן רואות את המתמטיקה כהכנה להשכלה הגבוהה ולשוק העבודה. בשילוב התייעצות עם מומחי מתמטיקה, גיבשנו את התוכן הנדרש לפיז"ה 2021.

הנושאים והסוגיות החדשים בפיז"ה 2021 שלא קיבלו דגש במחזורי פיז"ה הקודמים, יהיו, בין השאר:

- א. תופעת הצמיחה. סוגים שונים של צמיחה ליניארית או לא ליניארית.
- ב. קירוב גאומטרי. הערכת התמורות והמאפיינים של אי סדרים של צורות לא מוכרות, והמעבר מאובייקטים לצורות ואובייקטים מוכרים יותר שלגביהם יש נוסחאות וכלים.
- ג. סימולציות ממוחשבות. ניתוח מצבים (שעשויים לכלול תקצוב, תכנון, פיזור אוכלוסייה, הפצת מחלות, הסתברות ניסיונית, זמן תגובה להדגמה וכו'). במונחים של משתנים וההשפעה על תוצאות.

- ד. קבלת החלטות מותנית. שימוש בעקרונות בסיסיים של קומבינטוריקה והבנת יחסי הגומלין בין משתנים כדי לפרש מצבים ולספק תחזיות.
- ה. פונקציות. המושג של פונקציה, מדגיש אבל לא מגביל לפונקציות ליניאריות, המאפיינים שלהן, ושלל תיאורים וייצוגים שלהן. ייצוגים נפוצים הם מילוליים, סמליים, טבלאיים וגרפיים.
- ו. ביטויים אלגבריים. פרשנות מילולית ומניפולציה עם ביטויים אלגבריים, הכוללת מספרים, סמלים, פעולות חשבון, כוחות ושורשים פשוטים.
- ז. משוואות ואי שוויונים. משוואות ליניאריות ומשוואות הקשורות לעולם האי שיוונים, משוואות פשוטות ממעלה שניה, ושיטות פתרון אנליטי ולא אנליטי.
- ח. מערכות טבלאיות. הצגה ותיאור של מידע, הקשרים וכו'.
- ט. קבלת החלטות מבוססת תנאים. שימוש בעקרונות בסיסיים של קומבינציות והבנה בין הקשרים בין משתנים לפירוש סיטואציות וביצוע תחזיות.
- י. מדידה. כימות של מרכיבים של ובין צורות ואובייקטים כדוגמת מדידת זוויות, מרחק, אורך, קוטר, היקף שטח ונפח.
- יא. מספרים ויחידות. נושאים, הצגת מספרים ומספר מערכות (כולל המרה בין מערכות מספריות), כולל מאפיינים של משתנים ומספרים רציונליים, כמו גם כמויות ויחידות אשר מתייחסות לתופעה כדוגמת זמן, כסף, משקל, טמפרטורה, מרחק, שטח, נפח, נגזרות ותיאורן המספרי.
- יב. פעולות חשבון. אופי ותכונות פעולות אלה ומוסכמות רישום קשורות.
- יג. אחוזים, יחסים ופרופורציות. תיאור מספרי של הגודל היחסי ויישום הפרופורציות והנמקה פרופורציונאלית לפתרון בעיות.
- יד. עקרונות ספירה. שילובים פשוטים.
- טו. הערכה. קירוב מונע למטרה של כמויות וביטויים מספריים, כולל ספרות ועיגול משמעותיים.
- טז. איסוף נתונים, ייצוג ופרשנות. איסוף נתונים מסוגים שונים, והדרכים השונות לנתח, לייצג ולפרש אותם.
- יז. שונות הנתונים ותיאורה. מושגים כמו שונות, התפלגות ונטייה מרכזית של מערכי נתונים, ודרכים לתאר ולפרש אותן במונחים כמותיים וגרפיים.
- יח. סיכוי והסתברות. מושג של אירועים אקראיים, שונות אקראית וייצוגה, סיכוי ותדירות אירועים, והיבטים בסיסיים של מושג ההסתברות וההסתברות המותנית.
- האוריינות שתימדר, תהיה לפי מעגל תהליך החשיבה של התלמידים, מהבעיה המוצגת בהקשר של העולם האמיתי, אל המודל המתמטי ובחזרה:

א. **ניסוח.** לזהות ולתאר את ההיבטים המתמטיים של מצב מהעולם האמיתי, כולל זיהוי המשתנים; לפשט ולפרק מצב, כדי לתקנו בדרך מתמטית; לזהות היבטים של בעיה

הקשורים לבעיה מוכרת שפתרונה מוכר; לתרגם את הבעיה למודל מתמטי או אלגוריתמי.

ב. **יישום**. להציג את המודל המתמטי בדיאגרמה, גרף, או תכנה, תוך הפקת נתונים מתמטיים מתוכו; לבצע מניפוציה במספרים, בנתונים הגרפיים והסטטיסטיים, הביטויים האלגבריים, המשוואות והייצוגים הגיאומטריים; לנסח פתרון המציג מסקנות ביניים; להשתמש בכלים מתמטיים, כולל סימולציות וחישובי חשיבות כדי להתקרב לפתרונות אפשריים.

ג. **פירוש**. להשתמש בידע כיצד העולם האמיתי פועל ומשפיע על תוצאות וחישובים, כדי לבצע שיקול דעת בתוך הקשר ולשנות את אופן הצגת הנתונים ולתקנם ככל הדרוש; לבנות טיעונים והסברים כדי לתקשר את הפתרון בתוך ההקשר שבו הופיעה הבעיה; לזהות את המגבלות של המושגים המתמטיים והפתרונות של המודל המתמטי; להבין את היחסים בין ההקשר שבו הופיעה הבעיה ובין הדרך שבה מיוצג הפתרון; להשתמש בהבנה הזו כדי להעריך את ההיתכנות הממשית ואת המגבלות של הפתרון המוצע.

אוריינות מתמטית נועדה לפתור בעיה בהקשר מסוים. ההקשר הוא היבט מעולמו של התלמיד, החברה, התרבות, המדינה התקופה והעולם שבו הוא חי. עבור פיז"ה, חשוב להשתמש במגוון רחב של הקשרים. זה מאפשר להתחבר למגוון הרחב ביותר האינטרסים האישיים ועם מגוון הסיטואציות בהן אנשים פועלים במאה ה-21.

בפיז"ה 2021 יגדל טווח השונות של מדינות בעלות הכנסה נמוכה ובינונית, ולראשונה תהיה אפשרות לכלול במדגם גם תלמידים שלא לומדים במסגרת בית ספרית. לכן, חשוב מאוד שמפתחי המשימות יקחו אחריות רבה כדי להבטיח שהמשימות תונגשנה להקשרים מתאימים. חשוב להדגיש שגם עומס הקריאה של המשימות יישאר צנוע כך שהן תמשכנה להעריך אוריינות מתמטית.

ארבעה אזורי הקשר ועניין אשר יהיו רלבנטיים בפיז"ה 2021:

א. **אישי** – פעילויות שקשורות לאדם עצמו, למשפחה או לקבוצת עמיתים. סוגי ההקשרים העשויים להיחשב אישיים כוללים למשל הכנת אוכל, קניות, משחקים, בריאות, תחבורה, בילוי, ספורט, נסיעות, תזמון ומימון אישי.

ב. **תעסוקתי** – נושאים הקשורים לעולם התעסוקה, כגון, הערכת מחיר, הזמנת חומרים לבניין, חישוב שכר, בקרת איכות, הזמנות, ניהול מלאי, עיצוב וארכיטקטורה, ועוד. הקשרים תעסוקתיים עשויים להתייחס לכל רמה של כוח העבודה, החל מעבודה בלתי מיומנת לרמות הגבוהות ביותר של עבודה מקצועית.

ג. **חברתי** – בעיות המסווגות להקשרים חברתיים מתרכזות בקהילה של אדם מסוים (בין אם אזרית, לאומית או גלובלית). למשל, סוגיות כמו תחבורה ציבורית, ממשל, דמוגרפיה, פרסום, בריאות, בידור, סטטיסטיקה לאומית וכלכלה.

ד. **מדעי** – הכוונה לסוגיות המתייחסות למתמטיקה של עולם הטבע ולנושאים הקשורים למדע וטכנולוגיה. למשל, מזג אוויר או אקלים, אקולוגיה, רפואה, מדעי חלל, גנטיקה, מדידה ועולם המתמטיקה עצמו.

יש גם לתת את הדעת למדידת 'מיומנויות למאה ה-21', נושא שזוכה לעניין במערכות חינוך שונות. גם ה-OECD מלבן את הנושא בקבוצה שנקראת 'חינוך 2030' שבה שותפים נציגים מ-25 מדינות. הקבוצה הזו קוראת לנו, להתחשב בתוצרי העבודה שלהם כאשר אנחנו מעריכים את משימות המתמטיקה בפיז"ה.

יש לציין כי ב-15 השנים האחרונות התפרסמו מאמרים בנושא, ומכולם עולה הצורך להביא בהירות לכותרת של 'מיומנויות המאה ה-21'. לאחר עיון מדוקדק בחומרים אלו, ההמלצה היא לנסות לעשות זאת בתוך הקשרי תוכן ספציפיים, ולא כמיומנות כללית, וכחלק מהמיומנויות הדרושות לתחום עצמו.

לדוגמה, בתחום המתמטיקה, חשוב ללמד את התלמידים בבית הספר לקיים דיון מתמטי, ולטעון טיעונים כשיש באמתחתם טיעונים מוקפדים מבחינה מתמטית. הטיעונים צריכים להיות חזקים בתכנם ולא בקולם, כדי לעמוד בביקורת מתמטית. על התלמידים להיות מסוגלים להגן על הטיעון שלהם באמצעות הנמקה לוגית.

באופן דומה, חשוב מאד שתלמידים יפתחו חשיבה ביקורתית הנשענת על הגיון מתמטי. מדובר במיומנות ספציפית, כי גם ללא ההיגיון המתמטי והדיוק המתמטי, תלמידים יכולים להציג טיעון שגוי או לא מדויק, ולנצח בוויכוח. המשימה החינוכית היא לפתח את העירנות של המוחות הצעירים לסתירות האפשרויות הללו.

טווח רמות הקושי

סקר האוריינות המתמטית PISA 2021 כולל פריטים בטווח של רמות (1-6), התואם את טווח היכולות של תלמידים בני 15. טווח זה כולל משימות מאתגרות עבור התלמידים המצטיינים ומשימות שמתאימות לתלמידים המתקשים. מדדי המיומנות הללו (1-6) הם מרכיב מרכזי בדיווח של תוצאות פיז"ה.

במחזור 2021 נוסף רמת-משנה נוספת ברמת ההישג הנמוכה, כדי לאפשר לתלמידים הרבים שנמצאים בקבוצה זו לבטא את יכולתם. חשוב להקפיד שתלמידים לא יתקלו בקשיים הנוגעים לשפה או לתרבות על מנת לפתור את הבעיה המתמטית. יחד עם זאת, התכנים צריכים להיות מעניינים כדי למנוע אפשרות שהתלמידים לא יפתרו את הבעיה מפאת חוסר עניין.

המשימות ברמה הנמוכה יהיו שאלות בנושאים הקשורים לכסף, טמפרטורה, אוכל, זמן, תאריך, משקל ומרחק. הן יכללו משפטים פשוטים, כך שלתלמידים תהיה הבנה ברורה של מה שדרוש. בנוסף, חשוב שמשפטים יהיו קצרים ומדויקים. כך שהתלמידים יבינו על מה מדובר, ושלא ילכו לאיבוד בעקבות טקסט מורכב או בעל הקשר תרבותי.

טווח רמות הקושי – מתוך המסגרת המושגית של 2015

רמת מצוינות	רמת בסיס	
חילוץ המידע הרלבנטי מתוך טקסט, גרפים, טבלאות ודיאגרמות מורכבות, תוך שליפה מתוך ידע אחר וסדר חשיבה לא מוכר, ויכולת להביע ולהצדיק את התוצאה	משימות המצריכות מתן תשובה מספרית בלבד סביב טקסט קצר ברעיונות ובסדר חשיבה מוכרים	<u>תקשורת</u>
תרגום הבעיה למודל מתמטי, בחירת משתנים רלבנטיים, איסוף מדידות, יצירת תרשימים, פירוש יחסים באמצעות היקש בתנאים משתנים, זיהוי הנחות ואילוצים והשוואה בין מודלים	הבעיה מוצגת בדרך מתמטית, או שתרגומה למתמטיקה נעשה באופן ישיר והפירוש וההקשה נעשים ישירות ממודל נתון	<u>מתמטיזציה</u>
בחירה ופירוש של ייצוג מתמטי, תרגום בין ייצוגים, שינוי ייצוגים, השוואה בין ייצוגים, הבנת ייצוגים לא סטנדרטיים והתאמתם למצבים מורכבים	התמודדות ישירה עם ייצוג מוכר המופיע בבעיה (מעבר מטקסט למספרים), תוך בחירה ופירוש של ייצוג אחד, סטנדרטי או מוכר	<u>ייצוג</u>
ניתוח מידע כדי ליצור טיעון רב-שלבי, תוך חיבור משתנים, שרשור היסקים, הצדקת היקשים וקביעת הכללות מרכיבי מידע רבים	מילוא אחר הוראות הנתונות במשימה, תוך הפעלת מחשבה לחיבור בין פריטי מידע שונים לצורך קישור בין רכיבים והקשת היקשים	<u>היסק וטיעון</u>
בניית אסטרטגיה מורכבת, תוך המרת צורתו של מידע נתון לשם מציאת פתרון מקיף והערכת אסטרטגיות אפשריות שונות והשוואה ביניהן	ביצוע פעולות ישירות שהאסטרטגיה הנחוצה להן מוצהרת במפורש או ברורה מאליה, תוך החלטה על אסטרטגיה מתאימה בהתבסס על מידע הנתון בבעיה	<u>תכנון אסטרטגיות</u>
יישום הליכים מתמטיים בעלי שלבים רבים, תוך עבודה בצורה גמישה עם יחסים אלגבריים, ביצוע מניפולציות בסמלים ושימוש בכללים, הגדרות מוסכמות ונוסחאות ובידע מתמטי עמוק כדי להגיע לתוצאות	ביצוע חישובים בסיסיים על מספרים קטנים או נוחים לחישוב, תוך חישובים ושימוש ביחס פשוט מפורט או מרוזם ושימוש בסמלים מתמטיים פורמליים	<u>שימוש בשפה ובפעולות</u>
שימוש בכלים מורכבים בעלי אפשרויות פעולות רבות, תוך הפעלת מחשבה כדי להבין ולהעריך את יתרונותיו ומגבלותיו של כל כלי	שימוש בכלים מוכרים כגון כלי מדידה במצבים שבהם השימוש בכלים אלו תורגל היטב, תוך קישור בין פריטי מידע שונים	<u>שימוש בכלים מתמטיים</u>

משימות ממוחשבות

הפורמט העיקרי שבו מבחן פיז"ה 2021 יועבר יהיה באמצעות מחשב. מבחן ממוחשב יאפשר הזדמנות טובה לבדוק את האוריינות המתמטית. הזדמנות זו כוללת פורמטים חדשים של פריטים (למשל גרירה ושחרור); הצגה של נתונים מהעולם האמיתי (כגון ערכות נתונים גדולות וניתנות למיון); יצירת מודלים מתמטיים או סימולציות שתלמידים יכולים לחקור באמצעות שינוי הערכים; התאמת עקומות כדי לבצע תחזיות, ועוד.

בנוסף למגוון רחב יותר של סוגי שאלות והזדמנויות מתמטיות שהמבחן הממוחשב מזמן, הוא גם יאפשר מבחן אדפטיבי. משימות יותאמו לנבחנים לפי ההתקדמות שלהם במבחן עד כה. אם תלמיד מתקשה בהבנת הנקרא, המחשב ייתן לו הסבר, כדי שלא יתעכב בגלל בעיית הבנה של קריאה. אבל גם במתמטיקה, האדפטיביות תאפשר לתלמידים מצטיינים להפגין יכולות גבוהות ולא להיתקע כאשר מספר המשימות שהוקצה להם הסתיים.

המחשב מאפשר להתחבר לנושאים שמלהיבים יותר את התלמידים, ולהציג אותם בצורה מעניינת יותר וקלה יותר להבנה. אפשר להציג מודלים תלת ממדיים, ולהשתמש בכלים שהתלמידים רגילים להשתמש בהם בחיי היום-יום. עולם העבודה של היום נשען על שימוש במחשב, ולכן השימוש במחשב במבחן פיז"ה מתבקש.

המחשב מתאים במיוחד לשימוש בסימולציות שבהן תלמידים משנים ערכים וחוקרים את היחסים בעקבות זאת, מתאימים עקומה, עוסקים בבעיות תקצוב שבהן צריך לבחור בין קומבינציות שונות, לבצע סימולציות להצעות הלוואה, או מסלולי תשלום, ולכלול בעיות שכוללות קידוד ויזואלי של רצף פעולות.

חבילת הכלים העומדת לרשות התלמידים צפויה לכלול גם מחשבון מדעי בסיסי. פעולות שיכללו הם חיבור, חיסור, כפל וחילוק, כמו גם שורש ריבוע, π , סוגריים, אקספוננט, ריבוע, שבריר (y / x) , הפוך $(x / 1)$ והמחשבון יתוכנת להכרת סדר פעולות. תלמידים שיבחנו על גבי נייר יכולים לקבל גישה למחשבון כך יד, כפי שאושר לשימוש על ידי תלמידים בני 15 במערכות בית הספר שלהם.

שאלוני רקע

מאז מחזור הפיז"ה הראשון, שאלוני הרקע של תלמידים ובתי ספר שימשו לשתי מטרות קשורות זו בזו בשירות המטרה הרחבה יותר של הערכת מערכות חינוך: ראשית, שאלוני הרקע מספקים הקשר דרכו לפרש את התוצאות, הן בתוך מערכות החינוך והן בין מערכות. שנית, השאלונים נועדו לספק מדידה אמינה ותקפה של אינדיקטורים חינוכיים נוספים, שיכולים להצביע על מדיניות.

מכיוון שמתמטיקה היא התחום העיקרי במחזור 2021, שאלוני הרקע צפויים לספק מידע עשיר על החידושים הניכרים באוריינות המתמטית. העניין של התלמידים במתמטיקה והנכונות שלהם לעסוק בה בעתיד ימשיכו להיות השאלות המרכזיות של שאלוני הרקע גם במחזור 2021.

שאלות רלוונטיות יבררו את רמת העניין של התלמידים בלימודי המתמטיקה בבית הספר, בין אם הם רואים בכך שימושי בחיי היום יום, כמו גם בכוונותיהם להמשיך ללמוד במתמטיקה ולבחור בקריירות מבוססות מתמטיקה. קיים חשש בינלאומי לגבי תחום זה, מכיוון שבמדינות רבות המשתתפות יש ירידה בשיעור הסטודנטים שבחרים לימודים אקדמיים בתחומים הקשורים למתמטיקה, בעוד שבאותה עת ישנו צורך גובר בבוגרים מתחומים אלה.

רצונם של תלמידים ללמוד תחומים הקשורים למתמטיקה, ינותחו ביחס לגישה הבסיסית שלהם אל התחום, לרגשות ולאמונות האישיות שלהם, שגורמות להם להצליח או שלא להצליח ולהגיע לרמת האוריינות המתמטית הנדרשת. תלמידים שנהנים מפעילות הקשורה למתמטיקה, מרגישים בטוחים בעצמם וביכולתם להתחייב לעוד משימות הקשורות במתמטיקה, בתוך ומחוץ לבית הספר.